

INTERAÇÃO DE SISTEMAS
SOLO-ESTACA SUBMETIDOS
A SOLICITAÇÕES DINÂMICAS

Leopoldo Machado Paganelli

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO
DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovado por:



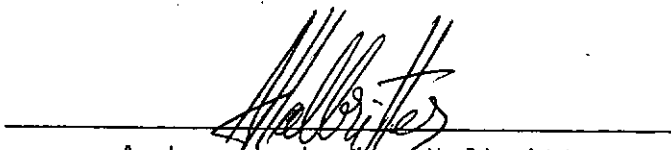
Nelson Francisco Favilla Ebecken
(Presidente)



Edison Castro Prates de Lima



Luiz Landau



Andres Ludovico Halbritter

RIO DE JANEIRO, RJ-BRASIL
MARÇO DE 1985

PAGANELLI, LEOPOLDO MACHADO

Interação de Sistemas Solo-Estaca a
Solicitações Dinâmicas (Rio de Janeiro)
1985.

VIII, 153 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Civil, 1985)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE.

1. Dinâmica de estacas I. COPPE/UFRJ

II. Interação de Sistemas Solo-Estaca
- Submetidos a Solicitações Dinâmicas

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson Francisco Favilla Ebecken pela orientação e estímulo, nas pesquisas e desenvolvimento deste trabalho.

Aos Engenheiros Sergio R.C. Mueller e Renato Gazola F. Andrade pelo incentivo à pós-graduação.

Aos Engenheiros Cipriano José de Medeiros Jr. e Celso Ayabe pelo apoio e colaboração recebidos.

Aos Professores Agustin Juan Ferrante, Edison Prates de Lima e Gilberto Ellwanger pelos apoios recebidos.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

INTERAÇÃO DE SISTEMAS
SOLO-ESTACA SUBMETIDOS
À SOLICITAÇÕES DINÂMICAS

Leopoldo Machado Paganelli

Março, 1985

Orientador: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Programa: Engenharia Civil

O objetivo deste trabalho é apresentar um método de análise para a interação dinâmica solo-estaca.

Uma solução analítica no domínio da frequência é desenvolvida para vibrações horizontais e seção transversal circular, modelando o solo como um material linear visco-elástico.

Uma comparação com o modelo de massa agrupada é realizada para estudos de sensibilidade, discutindo as diferenças entre as duas abordagens, e o papel desempenhado por diversos fatores.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

INTERACTION OF SOIL-PILE
SYSTEMS SUBJECTED TO
DYNAMIC SOLICITATIONS

Leopoldo Machado Paganelli

March, 1985

Chairman: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Department: Civil Engineering

The purpose of this work is to present a method of analysis for dynamic soil-pile interaction.

An analytical solution in frequency domain is developed for horizontal vibration and circular cross section, modelling the soil as a linear viscoelastic material.

A comparison with the model of lumped mass is performed for sensitivity studies, discussing the differences between the two approaches and the role played by several factors.

INDICE

I - INTRODUÇÃO	1
II - SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES	22
II.1 - Onda Dilatacional (onda P)	22
II.2 - Onda de Cisalhamento (onda S)	29
III - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA SEÇÃO CIRCULAR	35
III.1 - Condições Gerais	35
III.2 - Análise da Emissão de Energia para Determinação das Condições Iniciais e Condições de Contorno no Infinito	46
III.2.1 - Considerações Gerais	46
III.2.2 - Cálculo da Emissão de Energia	52
III.2.3 - Condições de Irradiação no Infini- to para Determinação das Fases Ini- ciais ϕ_1 , ϕ_2 , ψ_1 e ψ_2	60
III.2.3.1 - Fórmulas Gerais Assintóticas pa- ra o Campo Distante	60
III.2.3.2 - Expressões Gerais em Termos de Funções de Bessel	68
III.3 - Abordagem com Números Complexos	73
III.3.1 - Conceitos Gerais	73
III.3.2 - Deslocamentos Produzidos pela Onda de Cisalhamento	83
III.3.3 - Deslocamentos Produzidos pela Onda Dilatacional	86

III.3.4 - Condições de Contorno ao Longo do	
Perímetro da Seção do Cilindro	90
IV - CÁLCULO DA REAÇÃO DO SOLO SOBRE O CILINDRO	97
IV.1 - Deformações Específicas	97
IV.2 - Tensões na Superfície do Cilindro	102
IV.3 - Cálculo da Força Resultante sobre o	
Cilindro	106
V - EQUAÇÕES DINÂMICAS DO SISTEMA SOLO-ESTACA	
(PARA VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS)	116
V.1 - Equação da Linha Elástica	116
V.2 - Condições de Contorno	118
V.3 - Esforços Solicitantes	122
V.4 - Matriz de Rigidez do Sistema Solo-Estaca	125
VI - RESULTADOS	129
VII - CONCLUSÕES	142
VII.1 - Principais Diferenças entre os Modelos	
de Novak e Matlock	142
VII.2 - Discussão do Modelo Adotado	145
BIBLIOGRAFIA	151

I - INTRODUÇÃO

A dinâmica de estacas tem encontrado um vasto campo de aplicação em áreas tradicionais como fundações de máquinas, edifícios e pontes e, recentemente no desenvolvimento de estruturas "offshore" em águas profundas despertou um novo interesse no assunto. Vários tipos de abordagens tem sido formulados para a análise da interação dinâmica solo-estaca. Algumas formulações como a de Penzien⁽²⁾ e Matlock⁽¹⁾ consideram o modelo de massa agrupada, outras como a de Tajimi^(10,11), a de Novak e Nogami⁽³⁻⁹⁾, consideram o modelo contínuo e finalmente pesquisadores como Blaney⁽¹⁵⁾, Kuhlemeyer⁽¹⁶⁾, Wolf e von Arx⁽¹⁸⁾ utilizam o método dos elementos finitos. Cada uma dessas teorias apresenta vantagens e limitações que foram discutidas num relatório sobre o estado da arte (Seismic effects on piles), apresentado por Tajimi⁽¹¹⁾.

Uma grande quantidade de pesquisas tem sido conduzida e ainda prossegue em várias áreas de interesse como maquinário vibrante, terremotos, potencial de liquefação e interação entre estruturas adjacentes através do solo como meio transmissor.

Existem várias diferenças básicas entre os problemas de dinâmica em solos e os casos tradicionalmente estudados em dinâmica estrutural:

- a. O solo é um material altamente não linear e a faixa de deformações em que uma solução no regime elástico linear é válida é muito mais limitada do que a faixa linear das estruturas típicas.

- b. Ao contrário da maioria das estruturas, em que é possível se chegar a um modelo matemático apropriado usando a teoria de sistemas de membros discretos, os problemas de vibrações em solo pertencem à área de Mecânica do Contínuo onde as soluções analíticas são baseadas fundamentalmente na teoria de propagação de ondas. Um conhecimento dos princípios desta teoria ajuda consideravelmente a compreender o comportamento da solução e a adequabilidade dos métodos numéricos.
- c. Os problemas na dinâmica de solos tratam basicamente com um meio semi-infinito (semi-espaco homogêneo ou estratificado em camadas). Contornos bem definidos existem apenas na superfície e na base onde há uma nítida transição entre o solo e a rocha. A modelagem destes problemas usando técnicas discretas, como elementos finitos, requer atenção adequada para as condições de contorno, devido a substituição do meio semi-infinito por um domínio finito.

O comportamento não linear pode ser modelado segundo vários níveis de sofisticação:

- a. efetuando uma única análise estimando valores dos módulos elásticos e amortecimento para o solo, com base em fórmulas aproximadas.
- b. efetuando análises lineares iterativas, onde os valores dos módulos e do amortecimento são ajustados em cada ciclo de cálculo até que a diferença entre os valores consecutivos de cada parâmetro seja menor do que uma tolerância especi-

ficada. São usadas curvas experimentais relacionando módulo de rigidez e amortecimento com a máxima deformação para uma vibração cíclica.

- c. Através de um modelo discreto (elementos finitos ou diferenças finitas) assumindo relações constitutivas não-lineares e efetuando a solução por meio de integração numérica passo a passo no domínio do tempo acompanhando a curva tensão deformação. O método exige que as fronteiras sejam colocadas à distância suficiente da zona de interesse de modo a não dar tempo para a reflexão das ondas no intervalo de tempo abrangido pelo processo.

A maioria das soluções existentes se enquadram em um dos grupos: o das soluções discretas e o das soluções analíticas considerando o meio contínuo.

Soluções Discretas

Cargas de curta duração (como cargas de explosão) e problemas de amplificação em solo podem ser analisados por modelos de diferenças finitas. Soluções por elementos finitos são amplamente empregadas para cargas de longa duração e soluções no domínio da frequência para determinação da resposta ao "steady state". As aplicações mais comuns são para problemas bidimensionais de estado plano de deformações e para problemas de contorno cilíndrico onde a solução é expressa em série de Fourier em função do ângulo θ . Soluções pseudo-tridimensionais com condições de contorno impostas nas faces de lamelas também já foram sugeridas. Soluções gerais tridimensionais são computacio-

nalmente ineficientes devido ao elevado número de elementos necessários para uma boa representação do solo.

Técnicas matemáticas sofisticadas e programas computacionais correspondentes não garantem a adequabilidade dos resultados. Há dois tópicos principais a serem considerados: o tamanho dos elementos na malha relativo ao comprimento de onda característico da frequência e as condições de contorno que são criadas artificialmente para simular a irradiação de energia para o semi-espaco infinito. Se condições de contorno como engastamento ou apoio com um número de graus de liberdade forem utilizadas haverá a reflexão na fronteira, realimentando a energia na zona de estudo. Se o solo possui amortecimento interno do tipo histerético e o contorno externo é colocado longe da zona de interesse o problema da reflexão fica minimizado.

Na prática existem três tipos principais de condições de contorno:

- a. contornos elementares onde deslocamentos ou combinações de forças e deslocamentos são especificados para os nós;
- b. contornos viscosos, com amortecedores viscosos de propriedades constantes ao longo do contorno para problemas planos ou amortecedores com propriedades variáveis com a profundidade para absorção de ondas de Rayleigh no caso tridimensional (em geral com geometria cilíndrica);
- c. contornos consistentes, onde uma matriz de rigidez, dependente da frequência, é obtida resolvendo-se o problema de

propagação de onda num depósito elástico estratificado utilizando funções de deslocamentos como soluções verdadeiras da equação de onda na direção horizontal e consistente com as deformações da região do núcleo central na direção vertical.

O uso de contorno consistente é a melhor solução discreta para análises lineares no domínio da frequência fornecendo resultados em excelente concordância com as soluções analíticas, para os casos em que estas existem. Entretanto esta solução não pode ser efetuada no domínio do tempo; neste caso o contorno deve ser colocado afastado à distância suficiente da região central de interesse ou se utilizar contorno viscoso.

Um ponto importante é distinguir conceitualmente os dois tipos de amortecimento que ocorrem simultaneamente nos problemas de vibrações em solos. O amortecimento geométrico (amortecimento por irradiação de ondas elásticas) tem o comportamento do tipo viscoso, isto é, proporcional à frequência ao passo que o amortecimento interno do material é de natureza histerética independente da frequência, mas função da amplitude das deformações. A dissipação neste último é em forma de calor, ao passo que no amortecimento geométrico há a transferência contínua de energia mecânica para o meio semi-infinito sob a forma de ondas elásticas. Assim na solução dos problemas de vibrações em solos deve-se fazer a adequada distinção entre as perdas de natureza diferente e levadas em consideração.

Há uma forte tendência à generalização do uso de ele-

mentos nas fronteiras com propriedades de absorção ou irradiação simulando o semi-espaco infinito. Entre as soluções mais importantes pode-se citar o contorno transmissor desenvolvido por Lysmer e Waas (1972) e a dos elementos de contorno proposta por Brebbia (1981). O contorno transmissor utiliza o "elemento semifinito" que representa o semi-espaco infinito em camadas horizontais com propriedades de absorção total das ondas que chegam até ele. O elemento de contorno já contém na sua formulação uma solução exata da equação de onda bi ou tridimensional, incluindo ondas volumétricas e de cisalhamento. Daí decorre que a solução obtida pela soma das contribuições de cada elemento do contorno de uma fundação produzirá a solução específica para a geometria particular do problema como uma combinação linear adequada satisfazendo as condições de contorno. Cada elemento funciona como uma fonte irradiando ondas elásticas para o meio infinito.

Para a solução do sistema de múltiplos graus de liberdade são empregados três tipos de soluções:

- solução direta no domínio do tempo
- solução direta no domínio da frequência
- análise modal

Enquanto na dinâmica estrutural é comum o emprego da análise modal, para o caso de um maciço de solo é muitas vezes difícil interpretar os modos de vibração e associá-los a significado físico. Por isso a maioria dos problemas em dinâmica dos solos são resolvidos no domínio da frequência, para casos lineares ou análises iterativas; ou então no domínio do tempo, para

análises não lineares.

Soluções Analíticas

As soluções analíticas apesar de limitadas a casos de geometria simples e comportamento elástico linear (não linearidade pode ser considerada em procedimento iterativo) elas fornecem a base para a análise e interpretação física dos efeitos dos vários parâmetros. Os resultados são em geral razoáveis e os modelos analíticos são um padrão necessário para a avaliação da "performance" dos métodos numéricos e modelos discretos. Além disso os problemas mais complicados podem ser resolvidos eficientemente utilizando a superposição de soluções analíticas genéricas.

Uma das aplicações mais importantes é o estudo da rigidez dinâmica das fundações, análises de interação solo-estrutura e fundações de máquinas. O presente trabalho se ocupa de um caso relativamente simples de uma estaca vertical, isolada, de seção circular, num depósito de solo estratificado em camadas homogêneas de diferentes materiais. Considera-se também que a estaca seja flexível o suficiente para se poder aplicar a hipótese de Winkler. Assim não há transmissão de esforços horizontais de uma profundidade para outra o que equivale a dizer que as camadas de solo (e suas subdivisões) estão desacopladas e, conseqüentemente, o comportamento é de estado plano de deformações. Além disso não são considerados efeitos de amplificação dinâmica no solo, isto é, não ocorre ressonância de camadas. Nos casos mais freqüentes em que a transição do solo para a rocha está localizada a uma profundidade bem maior que o compri-

mento de onda médio das várias camadas, o que equivale a dizer que a frequência da excitação deve ser bem maior do que a frequência natural da camada ou conjunto de camadas sobre a rocha. A ocorrência de camadas de solo com propriedades distintas como acontece frequentemente, faz com que as ondas se propaguem predominantemente em planos horizontais porque ondas com direção oblíqua tendem a se refletir internamente dentro da camada, corroborando para a hipótese de estado plano de deformações.

Nas condições acima pode-se adotar a solução de Baranov para o estado plano de deformações para deduzir as constantes de Winkler para cada camada. Novak e Nogami utilizaram uma solução tridimensional para as equações do movimento da Teoria da Elasticidade, desprezando os deslocamentos verticais. Foram empregadas funções potenciais de Lamb para os deslocamentos, obtendo soluções que são combinações lineares de produtos de funções das variáveis r , θ e z , cada uma dependendo de uma única coordenada. Estas soluções são expressas por meio de séries de Fourier na variável z , representando os vários modos de vibração de uma camada homogênea apoiada sobre uma camada infinitamente rígida. A seguir ajustaram os coeficientes da série de modo a satisfazer a equação da linha elástica da estaca, acoplando estreitamente o sistema solo-estaca. Desse modo, obtiveram-se soluções particulares para o movimento da linha elástica, atendendo a condições de contorno na cabeça e na ponta apoiada da estaca. Neste modelo existe acoplamento total entre o solo e a estaca através de tensões de cisalhamento em planos horizontais, que se anulam na superfície do solo. Impondo deslocamento e rotação unitários na cabeça da estaca avaliaram-se os coeficien-

tes da solução homogênea da equação diferencial da linha elástica, que somada à solução particular satisfaz as condições de contorno dadas. Derivando o deslocamento foram obtidos os momentos fletores e forças cortantes fornecendo, conseqüentemente, a matriz de rigidez condensada no topo da estaca. Os elementos dessa matriz são complexos e representam as impedâncias da estaca que são as relações entre os esforços e os deslocamentos nos graus de liberdade (dois no caso de uma estaca de ponta vibrando no plano vertical). Esta teoria mais rigorosa deve ser usada nos casos em que se suspeita da possibilidade de ressonância do depósito de solo com considerável amplificação dinâmica, onde ocorre forte acoplamento entre camadas (não sendo aplicável a hipótese de Winkler). A solução do estado plano de deformações em qualquer plano horizontal implica na validade da hipótese de Winkler, onde em cada plano horizontal as tensões e deformações são as mesmas de um cilindro rígido infinito com igual deslocamento horizontal. Por isso a solução de Baranov deve ser aplicada com reservas. Um caso típico onde não vale a hipótese de Winkler é o caso real de uma experiência realizada por Novak e Grigg¹ (8) com modelo reduzido, comprovando a teoria rigorosa.

Finalmente existe um outro problema no modelo de estado plano da Teoria da Elasticidade: quando a frequência se aproxima de zero a rigidez que foi calculada aproximadamente diminui porque as reações do solo no estado plano para translações tendem a zero. Esta desvantagem pode ser corrigida ajustando a rigidez do solo para frequências muito baixas a um valor estático constante. O programa PILAY, desenvolvido pela Universidade

of Western Ontario aplica esta correção que é baseada na solução estática de Mindlin. Este comportamento foi comprovado experimentalmente por Kazama (13) em 1978 com uma estaca de prova de concreto armado de 2m de diâmetro, conforme o descrito no relatório de pesquisa da Universidade de Michigan. Esta teoria, baseada nas equações de Mindlin é aplicada nos modelos de Penzien e Matlock, válidas para as faixas de frequência de terremotos, que são consideradas baixas em dinâmica de solos. O modelo apresentado neste trabalho com respectivo programa de computador pode ser aplicado numa faixa de frequências mais elevadas como no caso de fundações de máquinas que operam em alta frequência.

Feitas as considerações acima passa-se ao equacionamento do movimento do solo usando as equações da Teoria da Elasticidade. Neste trabalho será considerada a Teoria da Elasticidade Linear usando a abordagem de variáveis complexas onde todos os parâmetros variáveis no domínio do tempo apresentam oscilações do tipo harmônico simples com frequência angular ω . Como os deslocamentos, tensões, deformações e demais parâmetros tem sua variação no domínio do tempo perfeitamente definida através de apenas dois parâmetros: amplitude e fase, o tratamento por números complexos elimina a variável tempo nas equações levando a grande simplificação nas equações e reduzindo drasticamente o tamanho dos programas computacionais com vantagens práticas evidentes. Atualmente a grande maioria dos "softwares" existentes permitem a definição de variáveis do tipo complexo e possuem em sua biblioteca, funções complexas, com argumentos complexos. Nos dias atuais existem "softwares" com variáveis complexas até para microcomputadores. O tratamento complexo em programação com

putacional é recomendado pelos melhores especialistas no assunto como o professor José M. Roesset da Universidade do Texas. No tratamento por variáveis complexas o módulo e o argumento representam a amplitude e a fase, respectivamente das grandezas físicas variáveis no tempo.

O tratamento da histerese e do amortecimento nas vibrações fica implícito quando se usam as constantes de Lamé λ e G complexas, na formulação das equações da Teoria da Elasticidade e no emprego de coeficientes de rigidez complexos. A parte imaginária λ' e G' das constantes de Lamé constitui as parcelas fora de fase (defasagem de 90°) de λ e G representando a histerese. Na Teoria da Elasticidade Linear o laço de histerese resulta numa elipse com os eixos principais inclinados, sendo que o eixo maior forma um ângulo com o eixo das deformações cuja tangente é aproximadamente igual ao módulo de elasticidade secante (ou módulo de rigidez secante no caso de distorção angular).

A parte imaginária dos coeficientes de rigidez desempenha o papel do amortecimento. As soluções são tratadas no domínio da frequência e a matriz de rigidez já contém implícita a matriz de amortecimento de um sistema de múltiplos graus de liberdade. Isto permite o tratamento de amortecimentos localizados como é o caso de interação solo estrutura em alta frequência, onde não é válido o emprego de um amortecimento estrutural uniforme, adotado em geral como uma fração do amortecimento crítico. Em altas frequências o amortecimento das fundações é alto devido ao fenômeno de irradiação ou (amortecimento geométrico) ao passo que na parte fora do solo o amortecimento é relati

vamente pequeno devido a resistências dos fluidos (ar, água) em que a estrutura está imersa. O tratamento no domínio da frequência pode também ser utilizado para fenômenos transientes, através de transformada de Fourier da excitação decompondo-a em vários harmônicos, abrangendo o espectro de frequências.

Empregando a solução analítica para o estado plano de deformações Novak em 1974 apresentou um trabalho onde deduz as fórmulas para o cálculo da rigidez dinâmica e amortecimento de estacas em solo homogêneo usando a solução analítica de Baranov do estado plano de deformações. Esta abordagem tem sido aplicada com grande sucesso em sapatas enterradas (Baranov, 1967; Novak e Beredugo, 1972; Novak e Sachs, 1973; Novak, 1974). No caso de solo estratificado (em camadas) cada trecho da estaca contido dentro de camada de solo homogêneo tem a sua matriz de rigidez calculada com as fórmulas para solo uniforme e, a seguir é montada a matriz de rigidez global da estaca, conectando os vários elementos correspondentes a cada camada, onde a rigidez do solo já está incluída na própria rigidez do elemento de estaca. Este modelo é computacionalmente muito eficiente e é amplamente usado em engenharia de fundações de máquinas. O modelo mais rigoroso com equacionamento tridimensional e solução por séries de Fourier é em geral usado apenas para o caso de uma camada de solo homogêneo depositada sobre material muito mais rígido (por exemplo rocha) porque consome muito esforço e memória de computador no caso de várias camadas. No caso de várias camadas a probabilidade de ocorrência de ressonância do depósito de solo é reduzida e o modelo mais simples com adoção da hipótese de Winkler é o mais utilizado.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIO ELÁSTICO LINEAR

As deformações específicas são obtidas a partir dos deslocamentos através das equações válidas para pequenas deformações.

Sejam u , v e w os deslocamentos nas direções radial, tangencial e axial, respectivamente.

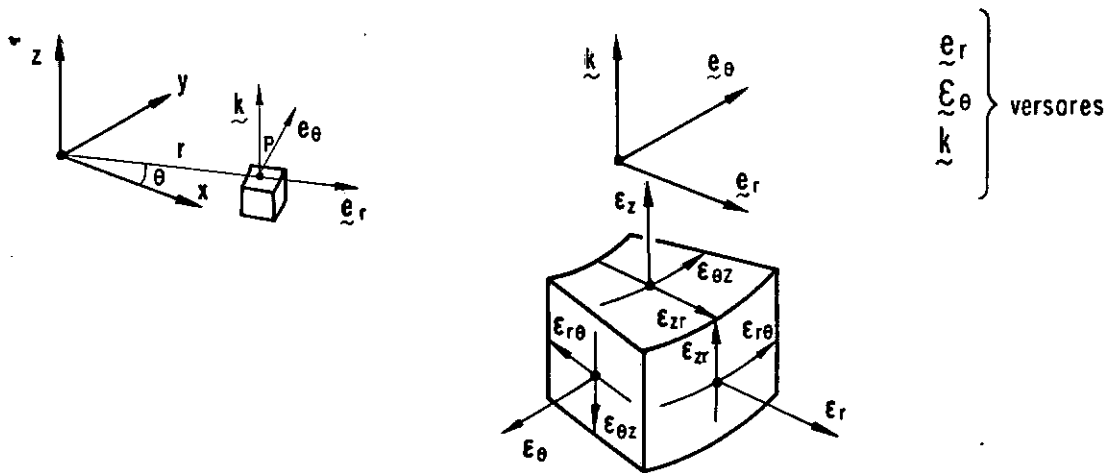


Figura I - Estado Triplo de Deformações.

As deformações específicas serão:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.1)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (1.2)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.3)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (1.4)$$

$$\epsilon_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1.5)$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (1.6)$$

Considerando material elástico linear isotropo, as deformações específicas são dadas pelas equações constitutivas.

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta - \nu \sigma_z) \quad (1.7)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_r + \sigma_\theta - \nu \sigma_z) \quad (1.8)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_r - \nu \sigma_\theta + \sigma_z) \quad (1.9)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta} \quad (1.10)$$

$$\epsilon_{zr} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zr} = \frac{1}{G} \tau_{zr} \quad (1.11)$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\theta z} = \frac{1}{G} \tau_{\theta z} \quad (1.12)$$

onde E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson e G é o módulo de rigidez.

Estas relações também podem ser expressas em termos das constantes de Lamé λ e G .

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.13)$$

e

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.14)$$

$$\sigma_r = \lambda \epsilon + 2G \epsilon_r \quad (1.15)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \epsilon + 2G \epsilon_\theta \quad (1.16)$$

$$\sigma_z = \lambda \epsilon + 2G \epsilon_z \quad (1.17)$$

$$\tau_{r\theta} = G \epsilon_{r\theta} \quad (1.18)$$

$$\tau_{zr} = G \epsilon_{zr} \quad (1.19)$$

$$\tau_{\theta z} = G \epsilon_{\theta z} \quad (1.20)$$

onde $\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z$

$\tilde{\epsilon}$ é a deformação volumétrica.

Seja $\tilde{\Omega}$ o vetor rotação de uma partícula, de componentes Ω_r , Ω_θ e Ω_z nas direções radial, tangencial e axial respectivamente. Este é dado em função dos deslocamentos pelas fórmulas:

$$\tilde{\Omega} = \Omega_r \underline{e}_r + \Omega_\theta \underline{e}_\theta + \Omega_z \underline{k} \quad (1.21)$$

$$\Omega_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (1.22)$$

$$\Omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (1.23)$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (1.24)$$

As equações (1.21), (1.22), (1.23) e (1.24) podem ser resumidas na equação vetorial seguinte:

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{U} \quad (1.25)$$

onde

$$\underline{U} = u \underline{e}_r + v \underline{e}_\theta + w \underline{k}$$

\underline{U} é o vetor deslocamento.

Uma vez que $\underline{\Omega}$ é um rotacional seu divergente é nulo.

Portanto:

$$\text{div } \underline{\Omega} = 0 \quad (\nabla \cdot \underline{\Omega} = 0) \quad (1.26)$$

ou

$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial r} + \frac{\partial \Omega_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = 0 \quad (1.27)$$

As equações diferenciais de equilíbrio são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} - \frac{\sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (1.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (1.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (1.30)$$

onde ρ é a densidade do meio elástico.

Substituindo as equações (1.1) a (1.6) que expressam as deformações específicas em função dos deslocamentos u , v e w , nas equações constitutivas (1.15) a (1.20), expressas em função das constantes de Lamé e, em seguida, substituindo nas equações de equilíbrio (1.28) a (1.30), após simplificações oriundas da substituição das expressões das componentes Ω_r , Ω_θ e Ω_z das equações (1.22), (1.23) e (1.24) chegamos às seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda+2G) \frac{\partial \epsilon}{\partial r} - \frac{2G}{r} \frac{\partial \Omega_z}{\partial \theta} + 2G \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.31) \\ (\lambda+2G) \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} - 2G \frac{\partial \Omega_r}{\partial z} + 2G \frac{\partial \Omega_z}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.32) \\ (\lambda+2G) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - 2G \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega_\theta) + \frac{2G}{r} \frac{\partial \Omega_r}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.33) \end{array} \right.$$

Combinando as equações (1.31), (1.32) e (1.33) obtemos:

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial z^2} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial z^2} - \frac{\Omega_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \Omega_r}{\partial t^2} \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_\theta}{\partial z^2} - \frac{\Omega_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Omega_r}{\partial \theta} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \Omega_\theta}{\partial t^2} \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial z^2} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial t^2} \quad (1.37)$$

onde:

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (1.38)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1.39)$$

V_p e V_s são, respectivamente, as velocidades de propagação da onda volumétrica e de cisalhamento, no meio elástico.

O primeiro membro da equação 1.34 é a expressão do Laplaciano da deformação volumétrica ϵ . Portanto a equação (1.34) pode ser escrita de forma abreviada como:

$$\nabla^2 \epsilon = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} \quad (1.40)$$

Os primeiros membros das equações (1.35), (1.36) e (1.37) são respectivamente as expressões das componentes radial, tangencial e axial do operador vetorial Laplaciano aplicado ao vetor rotação $\tilde{\Omega}$, de componentes Ω_r , Ω_θ e Ω_z .

Portanto o conjunto das equações (1.35), (1.36) e (1.37) pode ser expresso resumidamente pela seguinte equação vetorial:

$$\nabla^2 \tilde{\Omega} = \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial t^2} \quad (1.41)$$

Portanto:

$$\operatorname{div} (\nabla^2 \underline{\Omega}) = \nabla^2 (\operatorname{div} \underline{\Omega}) = 0$$

$$\operatorname{div} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\underline{\Omega}) \right\} = 0 \quad , \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{div} \underline{\Omega}) = 0$$

O divergente nulo da derivada de segunda ordem em relação ao tempo da função $\underline{\Omega}$ implica que esta integrada duas vezes em relação ao tempo produzirá necessariamente uma função de divergente constantemente nulo em qualquer ponto do meio elástico.

Portanto a condição da equação (1.26) é apenas um requisito para a condição inicial da solução do sistema de equações diferenciais constituído das equações (1.34), (1.35), (1.36) e (1.37) cujas funções incógnitas são ϵ , Ω_r , Ω_θ e Ω_z . Esta solução deve, obviamente, satisfazer também as condições de contorno impostas pela geometria do problema.

Temos então as seguintes equações diferenciais que regem o fenômeno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \epsilon = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (\text{equação 1.40})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \tilde{\Omega} = \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (\text{equação 1.41})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \tilde{\Omega} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{equação 1.26})$$

A condição de divergência nula do vetor rotação dada pela equação (1.26) ou sua equivalente (1.27) pode ser imposta para o campo vetorial $\tilde{\Omega}$ num instante t_0 . Isto é suficiente para que a divergência do campo $\tilde{\Omega}$ se mantenha nula ao longo do tempo, desde que obedeça à equação (1.41) ou às suas equivalentes (1.35), (1.36) e (1.37).

Isto decorre da propriedade do divergente de um Laplaciano de uma função vetorial de divergente nulo.

Para uma função $f(r, \theta, z)$ qualquer:

$$\text{div} \left[\nabla^2 f(r, \theta, z) \right] = \nabla^2 \left[\text{div} \{ f(r, \theta, z) \} \right]$$

onde

$$f(r, \theta, z) = \tilde{\Omega}(r, \theta, z, t_0)$$

II. SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

Considerando que os deslocamentos se desenvolvem no plano $r\theta$, as equações (1.34), (1.35), (1.36) e (1.37) ficam simplificadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \theta^2} = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} \\ \Omega_r = \Omega_\theta = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial \theta^2} = \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Ω_z é a única componente não nula do vetor rotação $\vec{\Omega}$. Assim Ω_z será doravante denotado por Ω .

II.1- Onda Dilatacional (onda P)

A equação de onda é:

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \theta^2} = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} \quad (2.1.1)$$

Consideremos a solução do tipo:

$$\epsilon = F(r) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.1.2)$$

onde n é um número inteiro.

Substituindo na equação (2.1.1) temos:

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) \cdot e^{i\omega t} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} F(r) \right] &= \\ &= -\cos(n\theta) e^{i\omega t} \frac{\omega^2}{v_p^2} F(r) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{v_p^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) F = 0$$

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{v_p^2} r^2 - n^2 \right) F = 0 \quad (2.1.3)$$

Fazendo a substituição $x = \frac{\omega r}{v_p}$

$$x^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + x \frac{dF}{dx} + (x^2 - n^2) F = 0 \quad (2.1.4)$$

Esta é equação diferencial de Bessel de ordem n

Sua solução geral é:

$$F(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad (2.1.5)$$

Onde $J_n(x)$ e $Y_n(x)$ são respectivamente funções de Bessel, de ordem n , de primeira e segunda espécie e C_1 e C_2 são constantes.

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!} \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} Y_n(x) = & \frac{2}{\pi} \{ \ln(x/2) + \gamma \} J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! (x/2)^{2k-n}}{k!} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{ \Phi(k) + \Phi(n+k) \} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k! (n+k)!} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

onde $\gamma = 0,5772156 \dots$ é a constante de Euler* e $n \neq 0$

$$\Phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} \quad \Phi(0) = 0$$

Para $n=0$ a função de Bessel de segunda espécie é:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \{ \ln(x/2) + \gamma \} J_0(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Phi(k) \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2} \quad (2.1.8)$$

Portanto a deformação volumétrica ε será:

$$\varepsilon = \left[C_1 J_n\left(\frac{\omega r}{v_p}\right) + C_2 Y_n\left(\frac{\omega r}{v_p}\right) \right] \cos(n\theta) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.1.9)$$

* $\gamma = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{M} - \ln M \right)$

Uma vez que a deformação volumétrica ϵ é uma combinação linear de funções de Bessel de 1.^a e 2.^a espécies $J_n(\omega r/V_p)$ e $Y_n(\omega r/V_p)$, com fatores que não dependem de r resolveremos o caso em que $C_1 = \frac{-\omega}{V_p}$ e $C_2 = 0$, obtendo assim uma solução. A seguir faremos $C_1 = 0$ e $C_2 = \frac{-\omega}{V_p}$ obtendo a outra solução independente.

Admitamos que os deslocamentos sejam dados pelas seguintes funções:

$$u = U \left(\frac{\omega r}{V_p} \right) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.1.10)$$

$$v = -V \left(\frac{\omega r}{V_p} \right) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.1.11)$$

A deformação volumétrica para o primeiro caso ($C_2=0$) é

$$\begin{aligned} \epsilon = \epsilon' &= C_1 J_n \left(\frac{\omega r}{V_p} \right) \cos(n\theta) e^{i\omega t} = \\ &= - \frac{\omega}{V_p} J_n \left(\frac{\omega r}{V_p} \right) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Lembrando que

$$\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Donde:

$$\epsilon = \left[\frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} - \frac{nV}{r} \right] \cos(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.1.13)$$

Iguando (2.1.13) a (2.1.12):

$$r \frac{dU}{dr} + U - nV = - \frac{\omega r}{V_p} J_n \left(\frac{\omega r}{V_p} \right)$$

Fazendo a substituição $\frac{\omega r}{V_p} = x$, temos:

$$\boxed{x \frac{dU}{dx} + U - nV = - x J_n(x)} \quad (2.1.14)$$

Impondo a condição de rotacional nulo através da equação (1.24) obtemos:

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \\ &= - \frac{e^{i\omega t} \sin(n\theta)}{2} \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} - \frac{nU}{r} \right) = 0 \end{aligned}$$

Para $\theta \neq k\pi$ onde k é inteiro e $r \neq 0$

$$r \frac{dV}{dr} + V - nU = 0 \quad (2.1.15)$$

ou

$$\boxed{x \frac{dV}{dx} + V - nU = 0} \quad (2.1.16)$$

Reunindo as equações (2.1.14) e (2.1.16) obtemos o sistema de equações diferenciais nas incógnitas $U(x)$ e $V(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \frac{dU}{dx} + U - nV = -x J_n(x) \end{array} \right. \quad (2.1.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \frac{dV}{dx} + V - nU = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.16)$$

A solução do sistema é

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) \end{array} \right. \quad (2.1.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x) = \frac{n}{x} J_n(x) \end{array} \right. \quad (2.1.18)$$

Para provar que a solução é esta, basta substituir as funções $U(x)$ e $V(x)$ no sistema tendo em vista as seguintes propriedades das funções de Bessel.

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \quad (2.1.19)$$

$$J'_n(x) = \frac{d J_n}{dx} = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \quad (2.1.20)$$

Propriedades análogas são válidas para as funções de 2ª espécie (Y_n).

Considerando agora a solução independente que possui apenas o termo relativo a função de Bessel de 2ª espécie, temos

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{-\omega}{v_p}$$

$$\begin{aligned} \epsilon = \epsilon'' &= C_2 Y_n\left(\frac{\omega r}{v_p}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \\ &= -\frac{\omega}{v_p} Y_n\left(\frac{\omega r}{v_p}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Obtemos analogamente o sistema

$$\begin{cases} x \frac{dU}{dx} + U - nV = -x Y_n(x) & (2.1.22) \\ x \frac{dV}{dx} + V - nU = 0 & (2.1.23) \end{cases}$$

Analogamente a solução do sistema é:

$$\begin{cases} U(x) = Y_{n-1}(x) - \frac{n}{x} Y_n(x) & (2.1.24) \\ V(x) = \frac{n}{x} Y_n(x) & (2.1.25) \end{cases}$$

A solução completa da onda volumétrica é portanto a combinação linear:

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$$

$$\varepsilon = \frac{-u_0 \omega}{V_p} e^{i\omega t} \cos(n\theta) \cdot \left[C_1 J_n\left(\frac{\omega r}{V_p}\right) + C_2 Y_n\left(\frac{\omega r}{V_p}\right) \right]$$

$$\begin{cases} u = u_0 e^{i\omega t} \cos(n\theta) \cdot \left[C_1 \left\{ J_{n-1}\left(\frac{\omega r}{V_p}\right) - \frac{nV_p}{\omega r} J_n\left(\frac{\omega r}{V_p}\right) \right\} + \right. \\ \quad \left. + C_2 \left\{ Y_{n-1}\left(\frac{\omega r}{V_p}\right) - \frac{nV_p}{\omega r} Y_n\left(\frac{\omega r}{V_p}\right) \right\} \right] \\ v = -u_0 e^{i\omega t} \sin(n\theta) \left[C_1 \frac{nV_p}{\omega r} J_n\left(\frac{\omega r}{V_p}\right) + \right. \\ \quad \left. + C_2 \frac{nV_p}{\omega r} Y_n\left(\frac{\omega r}{V_p}\right) \right] \end{cases} \quad (2.1.27)$$

Ou em função de $x = \omega r/V_p$

$$u = u_0 e^{i\omega t} \cos(n\theta) \cdot \left[C_1 \left\{ J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) \right\} + C_2 \left\{ Y_{n-1}(x) - \frac{n}{x} Y_n(x) \right\} \right] \quad (2.1.28)$$

$$v = -u_0 e^{i\omega t} \sin(n\theta) \cdot \left[C_1 \frac{n}{x} J_n(x) + C_2 \frac{n}{x} Y_n(x) \right] \quad (2.1.29)$$

II.2 - Onda de cisalhamento (onda S)

A equação de onda é:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} = \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \quad (2.2.1)$$

Consideremos a solução do tipo

$$\Omega = H(r) \cdot \sin(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.2.2)$$

Substituindo na equação (2.2.1) obtemos

$$\begin{aligned} \sin(n\theta) e^{i\omega t} \left[\frac{\partial^2 H(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H(r)}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} H(r) \right] &= \\ &= -\sin(n\theta) e^{i\omega t} \frac{\omega^2}{V_s^2} H(r) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{V_s^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) H = 0$$

$$r^2 \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + r \frac{\partial H}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{V_s^2} - n^2 \right) H = 0 \quad (2.2.3)$$

Fazendo a substituição $y = \frac{\omega r}{V_s}$

$$y^2 \frac{d^2 H}{dy^2} + y \frac{dH}{dy} + (y^2 - n^2) H = 0 \quad (2.2.4)$$

Tal como a equação (2.1.4) esta é também uma equação diferencial de Bessel de ordem n .

Sua solução geral é

$$H(y) = C_1 J_n(y) + C_2 Y_n(y) \quad (2.2.5)$$

Então Ω é uma solução do tipo

$$\Omega = \frac{\omega}{2 V_s} \left[C_1 J_n \left(\frac{\omega r}{V_s} \right) + C_2 Y_n \left(\frac{\omega r}{V_s} \right) \right] \sin(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.2.6)$$

Admitamos que os deslocamentos u e v sejam:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = U \left(\frac{\omega r}{V_s} \right) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \end{array} \right. \quad (2.2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = -V \left(\frac{\omega r}{V_s} \right) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \end{array} \right. \quad (2.2.8)$$

Para o caso em que a solução considerada tenha apenas o termo da função de Bessel de 1.^a espécie, com coeficiente C_1 unitário, temos:

$$\Omega = \Omega_1 = \frac{\omega}{2 V_s} J_n\left(\frac{\omega r}{V_s}\right) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.2.9)$$

Mas substituindo (2.2.7) e (2.2.8) em (1.24)

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{2} \left[\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} - \frac{nU}{r} \right] \sin(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.2.10)$$

Igualando (2.2.9) a (2.2.10)

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} - \frac{nU}{r} \right] = \frac{\omega}{2V_s} J_n\left(\frac{\omega r}{V_s}\right)$$

$$r \frac{dV}{dr} + V - nU = -\frac{\omega r}{V_s} J_n\left(\frac{\omega r}{V_s}\right)$$

Fazendo a substituição $\frac{\omega r}{V_s} = y$

$$y \cdot \frac{dV}{dy} + V - nU = -y J_n(y)$$

(2.2.11)

Considerando a condição de divergência nula para a onda de cisalhamento e usando as equações (1.1) e (1.2).

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \\ &= e^{i\omega t} \cos(n\theta) \left[\frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} - \frac{nV}{r} \right] = 0\end{aligned}$$

para $n\theta \neq (2K+1) \frac{\pi}{2}$ $r \neq 0$

$$\boxed{r \frac{dU}{dr} + U - nV = 0} \quad (2.2.12)$$

Fazendo a substituição $y = \omega r/V_s$

$$\boxed{y \frac{dU}{dy} + U - nV = 0} \quad (2.2.13)$$

Temos então o seguinte sistema nas funções incôg.

$U(y)$ e $V(y)$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \frac{dV}{dy} + V - nU = -y J_n(y) \end{array} \right. \quad (2.2.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \frac{dU}{dy} + U - nV = 0 \end{array} \right. \quad (2.2.13)$$

A solução do sistema é, analogamente ao caso da onda dilatacional.

$$\left\{ \begin{array}{l} U(y) = \frac{n}{y} J_n(y) \end{array} \right. \quad (2.2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(y) = J_{n-1}(y) - \frac{n}{y} J_n(y) \end{array} \right. \quad (2.2.15)$$

Considerando agora a solução independente da equação (2.2.1), correspondente a função de Bessel de 2ª espécie.

$$\Omega = \Omega_2 = \frac{\omega}{2 V_s} Y_n\left(\frac{\omega r}{V_s}\right) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \quad (2.2.16)$$

Obtemos um sistema análogo:

$$\left\{ \begin{array}{l} y \frac{dV}{dy} + V - nU = -y Y_n(y) \end{array} \right. \quad (2.2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \frac{dU}{dy} + U - nV = 0 \end{array} \right. \quad (2.2.18)$$

Sua solução é, analogamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(y) = \frac{n}{y} Y_n(y) \end{array} \right. \quad (2.2.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(y) = Y_{n-1}(y) - \frac{n}{y} Y_n(y) \end{array} \right. \quad (2.2.20)$$

A solução completa da onda de cisalhamento será a com binação linear

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega &= \frac{u_o \omega}{2V_s} e^{i\omega t} \sin(n\theta) \left[C_1 J_n(y) + C_2 Y_n(y) \right] \quad (2.2.21) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} u &= u_o e^{i\omega t} \cos(n\theta) \left[C_1 \frac{n}{y} J_n(y) + C_2 \frac{n}{y} Y_n(y) \right] \quad (2.2.22) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} v &= -u_o e^{i\omega t} \sin(n\theta) \left[C_1 \left\{ J_{n-1}(y) - \frac{n}{y} J_n(y) \right\} + C_2 \left\{ Y_{n-1}(y) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{n}{y} Y_n(y) \right\} \right] \quad (2.2.23) \end{aligned} \right.$$

onde $y = \frac{\omega r}{V_s}$

III. CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA SEÇÃO CIRCULAR

III.1-Condições Gerais

Nesta análise será considerada uma estaca cilíndrica vertical oscilando numa direção perpendicular ao seu eixo, em solo constituído de camadas homogêneas horizontais de materiais em geral distintos. A estaca será considerada muito mais rígida que o solo, mas flexível o suficiente para apresentar um perfil de linha elástica, com deslocamentos horizontais consideráveis variando em função da profundidade. Esta linha elástica possuirá, entretanto, inclinações suaves devido a rigidez da estaca ser muito maior que a do solo. Assim, a reação elástica do solo, por unidade de comprimento, em qualquer profundidade, dependerá apenas dos deslocamentos horizontais na profundidade em questão, sendo desprezado o cisalhamento no plano horizontal oriundo da interação entre camadas. Pode-se então dizer que é satisfeita a hipótese de Winkler.

Partiremos de uma análise plana do problema admitindo estado plano de tensões em cada camada, com base nas hipóteses supramencionadas. A partir de certa profundidade, a hipótese de estado plano de deformações é verificada com razoável precisão. À medida que se aproxima da superfície do solo o efeito do confinamento vai diminuindo até desaparecer por completo na superfície do terreno onde se tem estado plano de tensões. Isto causa uma certa variação da rigidez do solo aos deslocamentos horizontais, em função da profundidade (mantida a frequência).

Apesar da variação do confinamento do solo ao longo de uma vertical, ao se aproximar do contorno circular num plano horizontal, o atrito lateral, na direção vertical passa a atuar devido à razão de Poisson, produzindo um efeito de confinamento. A estaca ao se deslocar horizontalmente, comprime o solo à sua frente, fazendo o mesmo se expandir verticalmente próximo à superfície, devido à razão de Poisson. Atrás, o solo é tracionado provocando uma contração na direção vertical nas proximidades. Desse modo, um atrito lateral vertical é produzido junto à parede da estaca, próximo à superfície do terreno. Estas tensões de cisalhamento são as necessárias para manter nulos os deslocamentos verticais do solo junto à parede da estaca. Como para o cálculo da resultante das tensões do solo na superfície de contato, interessam apenas as deformações específicas do solo junto a esta interface, somente a região nas vizinhanças desta terá influência. Consequentemente o efeito de confinamento do atrito lateral vertical na região circunvizinha praticamente com pensarão a variação do confinamento com a profundidade.

Vamos adotar o seguinte sistema de coordenadas. O eixo z , vertical, coincide com o eixo do cilindro e está orientado de cima para baixo e o eixo x tem a direção e orientação dos deslocamentos positivos. A origem O do sistema de referência está na interseção do plano horizontal da superfície do solo com o eixo do cilindro.

A figura III.1 ilustra as componentes do deslocamento numa seção genérica

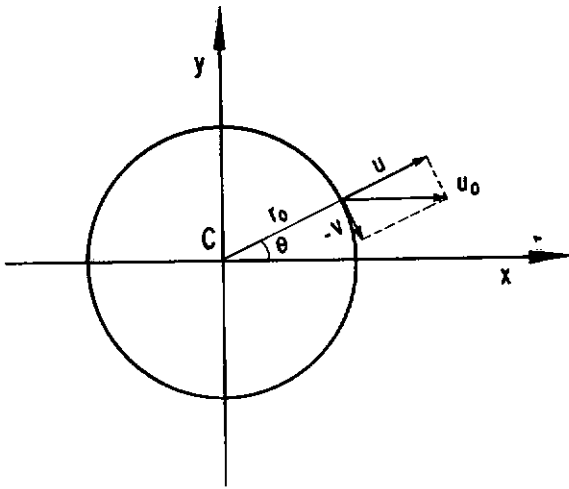


Figura III.1 - Deslocamentos no Contorno da Seção.

- Seja r_0 o raio do cilindro, u_0 a amplitude do movimento considerado harmônico simples, de frequência, f .
- Suponhamos que o centro da seção tenha o movimento dado pela equação

$$u_c = u_0 \cos \omega t \quad (3.1)$$

onde: u_c = elongação

u_0 = amplitude do MHS

$\omega = 2\pi f$

t = tempo

Considerando que as partículas de solo aderentes ao contorno da seção devem ter os mesmos deslocamentos que o centro da mesma, podemos escrever para $r = r_0$.

$$r = r_0 \Rightarrow \begin{cases} u = u_0 \cos \theta \cos \omega t & (3.2) \\ v = -u_0 \sin \theta \cos \omega t & (3.3) \end{cases}$$

onde:

$$u = u(r, \theta)$$

$$v = v(r, \theta)$$

Foi visto no Capítulo I que a solução para a equação diferencial de onda, para a componente vertical Ω_z do vetor rotação Ω da partícula é uma combinação linear de soluções do tipo:

$$\Omega_n = \frac{1}{2} \frac{\omega u_0}{V_s} \left[A_{n_1} J_n \left(\frac{\omega r}{V_s} \right) \cos(\omega t + \phi_{n_1}) + \right. \\ \left. + A_{n_2} Y_n \left(\frac{\omega r}{V_s} \right) \cos(\omega t + \phi_{n_2}) \right] \sin(n\theta) \quad (3.4)$$

$$\Omega = \sum_n \Omega_n \quad (3.5)$$

onde V_s é a velocidade da onda de cisalhamento.

A solução da equação de onda para a deformação volumétrica ϵ é uma combinação de soluções do tipo.

$$\epsilon_n = \frac{-\omega u_0}{V_p} \left[B_{n_1} J_n \left(\frac{\omega r}{V_p} \right) \cos(\omega t + \psi_{n_1}) + \right. \\ \left. + B_{n_2} Y_n \left(\frac{\omega r}{V_p} \right) \cos(\omega t + \psi_{n_2}) \right] \cos(n\theta) \quad (3.6)$$

$$\epsilon = \sum_n \epsilon_n \quad (3.7)$$

onde V_p é a velocidade da onda dilatacional.

As constantes A_{n_1} , A_{n_2} , B_{n_1} e B_{n_2} , os ângulos de fase ϕ_{n_1} , ϕ_{n_2} , ψ_{n_1} e ψ_{n_2} , e a constante inteira n que define a variação de ϵ e Ω com a direção θ , de emissão, tem os seus valores determinados a partir da forma geométrica do contorno rígido, em movimento oscilatório, engastado no meio elástico. O movimento aqui é considerado harmônico simples de translação na direção do eixo x . Os ângulos de fase ϕ_{n_1} e ϕ_{n_2} , da onda de cisalhamento e ψ_{n_1} e ψ_{n_2} da onda dilatacional bem como, as relações entre os coeficientes A_{n_1} e A_{n_2} e entre B_{n_1} e B_{n_2} são determinadas em função das condições de irradiação e reflexão ao nível do contorno. Estas condições se referem a composição percentual da onda de irradiação, com a onda estacionária de reflexão, no caso mais geral.

No caso de movimento harmônico simples, após decorrido tempo suficientemente longo, haverá apenas irradiação pura, uma vez que as ondas reverberadas de reflexão já terão sido dissipadas, eliminando assim o efeito transiente de choque elástico. Neste regime estacionário, o trabalho realizado sobre a estaca, por uma máquina ou qualquer agente externo será todo dissipado no solo através da irradiação.

A variação direcional da potência irradiada, para um contorno qualquer, será expressa através de uma combinação linear de infinitos termos do tipo Ω_n para compor a rotação Ω de uma partícula no caso da onda de cisalhamento. No caso de uma onda dilatacional esta variação direcional será expressa através de combinação linear de infinitos termos do tipo ϵ_n , compondo a deformação volumétrica ϵ . Como cada termo possui um fator

independente de θ multiplicado por um fator "sen ($n\theta$)" para Ω_n e "cos($n\theta$)" para ε_n , as séries que representam a variação de Ω e ε com θ são séries de Fourier. A constante inteira n , no caso de uma seção qualquer pode variar de um a infinito. No caso de seção circular a série possui apenas o primeiro termo onde n é igual à unidade, conforme veremos a seguir.

Calculemos os deslocamentos associados à rotação Ω_n produzida pela onda de cisalhamento, correspondente à solução independente de ordem n .

Empregando a equação (1.24), que fornece a rotação Ω_z em função dos deslocamentos tem-se:

$$\Omega_n(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (3.8)$$

donde

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 2 \Omega_n(r, \theta, t) \quad (3.9)$$

$$\Omega_n(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \frac{\omega u_0}{v_s} \left[A_{n_1} J_n \left(\frac{\omega r}{v_s} \right) \cos(\omega t + \phi_{n_1}) + \right. \\ \left. + A_{n_2} Y_n \left(\frac{\omega r}{v_s} \right) \cos(\omega t + \phi_{n_2}) \right] \text{sen}(n\theta)$$

A deformação volumétrica na onda de cisalhamento é nu

$$\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_\theta \quad (3.10)$$

onde ϵ_r e ϵ_θ são dados pelas equações (1.1) e (1.2)

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

donde

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (3.11)$$

Impondo a condição de deformação volumétrica nula, obtem-se a segunda equação:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (3.12)$$

Os deslocamentos u e v são calculados resolvendo - se o sistema constituído das equações (3.9) e (3.12)

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 2 \Omega_n (r, \theta, t) \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema obtem-se para os deslocamentos:

$$\left\{ \begin{aligned} u = \bar{u}_n = u_0 \cos(n\theta) & \left[A_{n_1} \frac{n}{a} J_n(a) \cos(\omega t + \phi_{n_1}) + A_{n_2} \frac{n}{a} Y_n(a) \cos(\omega t + \phi_{n_2}) \right] \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} v = \bar{v}_n = -u_0 \sin(n\theta) & \left[A_{n_1} \left\{ J_{n-1}(a) - \frac{n}{a} J_n(a) \right\} \cos(\omega t + \phi_{n_1}) + \right. \\ & \left. + A_{n_2} \left\{ Y_{n-1}(a) - \frac{n}{a} Y_n(a) \right\} \cos(\omega t + \phi_{n_2}) \right] \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

onde $a = \frac{\omega r}{v_s}$

Calculemos agora os deslocamentos associados à deformação volumétrica ϵ_n , produzida pela onda dilatacional, correspondente a solução independente de ordem n .

Empregando a equação (3.11), que fornece a deformação ϵ em função dos deslocamentos,

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \epsilon_n(r, \theta, t) \quad (3.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon_n(r, \theta, t) = - \frac{\omega u_0}{v_p} & \left[B_{n_1} J_n\left(\frac{\omega r}{v_p}\right) \cos(\omega t + \phi_{n_1}) + \right. \\ & \left. + B_{n_2} Y_n\left(\frac{\omega r}{v_p}\right) \cos(\omega t + \phi_{n_2}) \right] \cdot \cos(n\theta) \end{aligned}$$

Impondo a condição de movimento irrotacional, para a onda dilatacional, obtemos a equação:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad (3.16)$$

Os deslocamentos u e v da onda dilatacional são calculados resolvendo-se o sistema constituído das equações (3.15) e (3.16).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \epsilon_n(r, \theta, t) \\ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo-se este sistema, obtem-se para deslocamento

$$\begin{cases} u = \bar{u}_n = u_0 \cos(n\theta) \left[B_{n_1} \left\{ J_{n-1}(b) - \frac{n}{b} J_n(b) \right\} \cos(\omega t + \psi_{n_1}) + \right. \\ \left. + B_{n_2} \left\{ Y_{n-1}(b) - \frac{n}{b} Y_n(b) \right\} \cos(\omega t + \psi_{n_2}) \right] \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} v = \bar{v}_n = -u_0 \sin(n\theta) \left[B_{n_1} \frac{n}{b} J_n(b) \cos(\omega t + \psi_{n_1}) + B_{n_2} \frac{n}{b} Y_n(b) \cos(\omega t + \psi_{n_2}) \right] \end{cases} \quad (3.18)$$

onde $b = \frac{\omega r}{v_p}$

Compondo-se os deslocamentos da onda de cisalhamento com os da onda dilatacional, obtém-se os deslocamentos resultantes u e v

$$u = \bar{u} + \bar{\bar{u}} = \sum_n u_n \quad (3.19)$$

$$v = \bar{v} + \bar{\bar{v}} = \sum_n v_n \quad (3.20)$$

onde: $u_n = \bar{u}_n + \bar{\bar{u}}_n \quad (3.21)$

$$v_n = \bar{v}_n + \bar{\bar{v}}_n \quad (3.22)$$

No contorno cilíndrico devem ser satisfeitas as condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(r_0, \theta, t) = u_0 \cos \theta \cos \omega t \end{array} \right. \quad (3.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(r_0, \theta, t) = -u_0 \sin \theta \cos \omega t \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Fazendo-se n igual à unidade as equações (3.13) e (3.14), que dão os deslocamentos devidos à onda de cisalhamento (onda S), se tornam as seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = u_0 \cos \theta \left[A_1 \frac{1}{a} J_1(a) \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \frac{1}{a} Y_1(a) \cos(\omega t + \phi_2) \right] \end{array} \right. \quad (3.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = -u_0 \sin \theta \left[A_1 \left\{ J_0(a) - \frac{1}{a} J_1(a) \right\} \cos(\omega t + \phi_1) + \right. \\ \left. + A_2 \left\{ Y_0(a) - \frac{1}{a} Y_1(a) \right\} \cos(\omega t + \phi_2) \right] \end{array} \right. \quad (3.26)$$

onde $a = \frac{\omega r}{v_s}$

E os deslocamentos devidos à onda dilatacional ficam

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u} = u_0 \cos\theta & \left[B_1 \left\{ J_0(b) - \frac{1}{b} J_1(b) \right\} \cos(\omega t + \psi_1) + \right. \\ & \left. + B_2 \left\{ Y_0(b) - \frac{1}{b} Y_1(b) \right\} \cos(\omega t + \psi_2) \right] \end{aligned} \right. \quad (3.27)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{v} = -u_0 \sin\theta & \left[B_1 \frac{1}{b} J_1(b) \cos(\omega t + \psi_1) + B_2 \frac{1}{b} Y_1(b) \cos(\omega t + \psi_2) \right] \end{aligned} \right. \quad (3.28)$$

onde $b = \frac{\omega r}{v_p}$

Fazendo-se $r = r_0$

$$a = a_0$$

$$b = b_0$$

onde a_0 e b_0 são as frequências adimensionais das ondas de cisalhamento (S) e da onda dilatacional (P), respectivamente

$$a_0 = \frac{\omega r_0}{v_s} \quad (3.29)$$

$$b_0 = \frac{\omega r_0}{v_p} \quad (3.30)$$

Observando-se as expressões (3.25), (3.26), (3.27) e (3.28), nota-se que a componente radial dos deslocamentos é proporcional a " $\cos\theta$ " e a componente tangencial é proporcional a " $-\sin\theta$ ". Portanto a medida que θ varia as componentes radial e tangencial dos deslocamentos se mantêm proporcionais às componentes u e v dadas pelas condições de contorno (3.23) e (3.24). Resta determinar os ângulos de fase ϕ_1 , ϕ_2 , ψ_1 e ψ_2 e as constantes A_1 , A_2 , B_1 e B_2 tais que satisfaçam rigorosamente as equações (3.23) e (3.24) no contorno ($r=r_0$).

Conclui-se que no caso de seção circular as séries de Fourier que dão os deslocamentos em função de θ , possuem apenas o primeiro termo em que n é igual a um

$$u = u_1$$

$$v = v_1$$

III.2- Análise da Emissão de Energia para Determinação das Condições Iniciais e Condições de Contorno no Infinito

III.2.1 - Considerações Gerais

Analiseemos a composição da energia de uma partícula em movimento harmônico simples (MHS). A energia desta partícula compõe-se de duas parcelas, uma cinética e outra potencial elástica. A soma das duas é constante e igual a energia da partícula.

No instante em que a energia potencial é mínima, a

energia cinética é máxima. Este mínimo de energia potencial ocorre quando a partícula está passando pela sua posição de equilíbrio estático, no estado de tensões relaxado, portanto com energia potencial elástica igual a zero. Analogamente existe um instante em que sua energia potencial elástica é máxima, quando sua energia cinética é mínima e igual a zero. Portanto pode-se calcular a energia total da partícula calculando-se sua energia potencial elástica no instante em que seu deslocamento é máximo, ou calculando-se sua energia cinética no instante em que seu deslocamento relativo à posição de equilíbrio é nulo.

A partícula considerada será um elemento de volume dV , do meio elástico, possuindo massa dm . Sua energia cinética pode ser calculada considerando-se que o movimento harmônico simples é uma projeção de um movimento circular uniforme. Assim a energia cinética no instante em que é máxima, é igual a energia cinética que teve a partícula no movimento circular uniforme do qual seu movimento é projeção. Portanto a energia cinética E_c de um volume elementar dV , no instante em que é máxima, é:

$$E_c = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 u_0^2 dm = \frac{1}{2} \rho u_0^2 \omega^2 dV \quad (3.31)$$

onde dm é a massa do elemento de volume dV , v é a velocidade máxima do MHS, ρ a densidade do meio elástico, u_0 é o deslocamento máximo da partícula e ω é a frequência angular do MHS.

No instante em que a energia cinética é anulada, a energia potencial elástica é máxima. Portanto a energia potencial máxima da partícula é:

$$E_p = E_c = \frac{1}{2} \rho u_0^2 \omega^2 dV \quad (3.32)$$

Considerando que:

- a) as deformações são proporcionais aos deslocamentos
- b) a energia potencial e cinética variam com a mesma amplitude dada pelas equações (3.31) e (3.32), proporcional ao quadrado do deslocamento máximo u_0 .
- c) as deformações específicas lineares e angulares são proporcionais aos deslocamentos.

pode-se concluir que a energia de um elemento de volume do meio elástico, que é igual ao valor máximo, tanto da energia potencial como da energia cinética, é proporcional ao quadrado das deformações específicas e deslocamentos.

Isto pode ser notado pela fórmula da Teoria da Elasticidade, que dá expressão da energia potencial elástica W , por unidade de volume:

$$W = \frac{1}{2} \lambda \epsilon^2 + G(\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2) + \frac{1}{2} G(\epsilon_{r\theta}^2 + \epsilon_{\theta z}^2 + \epsilon_{zr}^2) \quad (3.33)$$

onde:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \epsilon = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z$$

Os valores de ϵ_r , ϵ_θ , ϵ_z , $\epsilon_{r\theta}$, $\epsilon_{\theta z}$ e ϵ_{zr} são dados pelas equações (1.1) a (1.6) do capítulo I. Relembrando estas

fórmulas:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.34)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (3.35)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.36)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (3.37)$$

$$\epsilon_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (3.38)$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (3.39)$$

Calculando-se os valores de ϵ_r a partir das relações constitutivas e substituindo-se na equação (3.33) obtém-se a equação que fornece a energia potencial elástica por unidade de volume, em função das tensões:

$$W = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left(\frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3} \right)^2 + \frac{2(1+\nu)}{3E} \left[\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_z}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2G} (\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{zr}^2) \quad (3.40)$$

Considerando o estado plano de deformações

$$\epsilon_z = \epsilon_{\theta z} = \epsilon_{zr} = 0$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{zr} = 0$$

A expressão da energia potencial W por unidade de volume, em função das deformações específicas fica

$$W = \frac{E(1-\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{1}{1-\nu} (\epsilon_r + \epsilon_\theta)^2 + \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) (\epsilon_r - \epsilon_\theta)^2 + \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \epsilon_{r\theta}^2 \right] \quad (3.41)$$

Considerando as expressões das velocidades da onda dilatacional e de cisalhamento dadas pelas equações (1.38) e (1.39).

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (3.42)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} \quad (3.43)$$

e chamando de α a relação entre as velocidades da onda S e da onda P , temos as relações

$$\alpha = \frac{V_s}{V_p} \quad (3.44)$$

$$\alpha^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (3.45)$$

$$\nu = \frac{1-2\alpha^2}{2(1-\alpha^2)} \quad (3.46)$$

Substituindo a equação (3.46) em (3.41) obtem-se a expressão da energia potencial por unidade de volume em função da velocidade da onda P

$$W = \frac{1}{2} \rho V_p^2 \left[(1-\alpha^2) \epsilon^2 + \alpha^2 (\epsilon_r - \epsilon_\theta)^2 + \alpha^2 \epsilon_{r\theta}^2 \right] \quad (3.47)$$

Substituindo os valores de σ_z em função de σ_r e σ_θ e $\tau_{\theta z}$ e τ_{zr} , (iguais a zero), na equação (3.40), obtemos a expressão da energia potencial

$$W = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \left[(1-\nu) \left(\frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \right)^2 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \right)^2 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \tau_{r\theta}^2 \right] \quad (3.48)$$

Substituindo a relação (3.46) em (3.48), obtem-se a expressão de W em função de V_p .

$$W = \frac{1}{2\rho V_p^2} \left[\frac{1}{1-\alpha^2} \left(\frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{\alpha^2} \tau_{r\theta}^2 \right] \quad (3.49)$$

III.2.2-Cálculo da Emissão de Energia

Para calcularmos a potência irradiada e sua distribuição direcional, devemos primeiramente calcular a energia por unidade de volume ao longo da direção radial, integrá-la variando a distância radial r de um comprimento de onda e dividi-la pelo período T da onda, obtendo-se assim a potência irradiada por unidade de superfície da frente de onda. Considerando um setor $d\theta$, calculamos a potência irradiada por este. Esta será o valor obtido por unidade de superfície, da maneira descrita, multiplicado pela área transversal do setor $d\theta$, que intercepta a onda. A área considerada dS é

$$dS = r \, d\theta \, dz \quad (3.50)$$

Considerando a emissão de energia pelo setor $d\theta$ numa camada de espessura unitária (fig.III.2), a área dS se reduz a:

$$dS = r \, d\theta \quad (3.51)$$

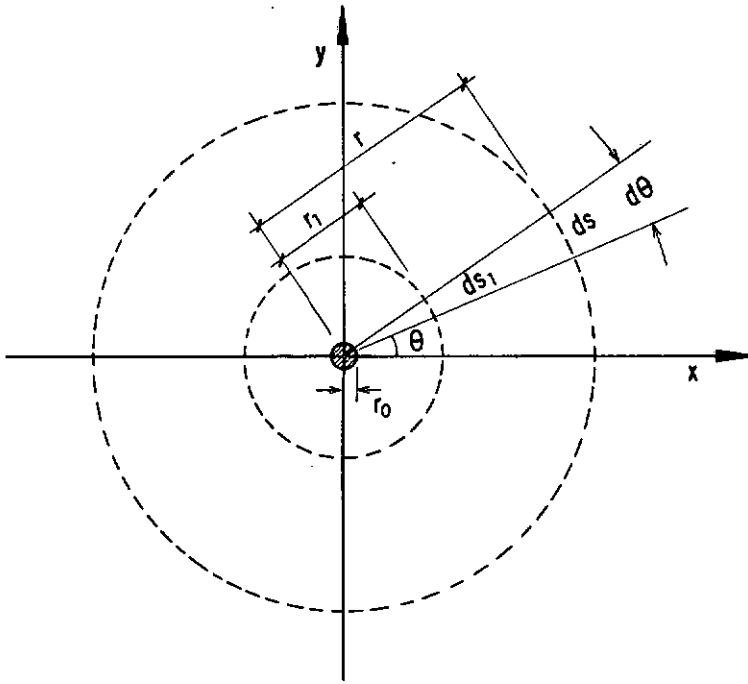


Figura III.2- Irradiação Direcional Através de um Setor Elementar " $d\theta$ ".

Nesta análise da potência irradiada será considerado apenas o campo distante da fonte, para determinação das condições de contorno no infinito. Serão feitas simplificações nas equações com base na consideração de que a distância radial r , na região considerada em estudo é muito maior que o raio do cilindro r_0 .

Considerando esta hipótese as equações que dão as deformações específicas, (3.34), (3.35) e (3.37) ficam

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.52)$$

$$\epsilon_\theta = 0 \quad (3.53)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.54)$$

E a expressão (1.24) que dá o valor de Ω_z fica

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.55)$$

Portanto

$$\boxed{\Omega_z = \frac{1}{2} \epsilon_{r\theta}} \quad (3.56)$$

Recapitulando a expressão (1.24) do capítulo 1

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

Considerando onda de cisalhamento puro, para um ponto distante tem-se

$$\epsilon = 0 \quad (\text{onda de cisalhamento})$$

$$\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_\theta = 0$$

Mas:

$$\epsilon_\theta = 0$$

Portanto:

$$\epsilon = \epsilon_r + 0 = 0$$

Donde:

$$\epsilon_r = 0$$

A expressão (3.47) para a onda de cisalhamento fica:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \rho V_s^2 \epsilon_{r\theta}^2} \quad (3.57)$$

Considerando agora onda dilatacional para

$$\epsilon_{r\theta} = 0$$

$$\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_\theta = \epsilon_r$$

Portanto

$$\epsilon_r = \epsilon$$

Substituindo $\epsilon_r = \epsilon$, $\epsilon_\theta = \epsilon_{r\theta} = 0$ na equação (3.47) obtem-se:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \rho V_p^2 \epsilon^2} \quad (3.58)$$

Calculemos agora a potência irradiada pelo setor elementar $d\theta$. Será calculado o fluxo de energia através da seção dS da fig. III.2.

O fluxo de energia pela seção dS , pode ser visualizado como a passagem, pela seção de controle, de pacotes de ener-

gia, de forma prismática de seção dS e comprimento igual ao comprimento de onda, encadeados numa sequência que constitui o trem de ondas. Esse trem de ondas, é na realidade um feixe contínuo que se desloca com a velocidade de propagação da onda. Desse modo, conhecendo-se a densidade volumétrica média da energia no feixe, basta multiplicar esta pelo volume de um segmento do feixe correspondente a um comprimento de onda e dividir em seguida o resultado pelo período T .

Para evitar ter que calcular o volume do feixe, considerando a variação de sua seção transversal ao longo da direção de propagação da onda e ainda evitar a integração de funções de Bessel, estimaremos esta densidade média, calculando-se a média ao longo do tempo. A média volumétrica da densidade de energia W num segmento do feixe, de tamanho igual a um comprimento de onda, deve ser igual a média temporal de W , calculada num período T .

Daí resulta a expressão para a potência elementar dP , irradiada por uma onda do tipo S (cisalhamento), através de uma seção dS , definida pelo diedro $d\theta$, por unidade de comprimento da fonte emissora linear, que é o eixo do cilindro.

$$dP = \bar{W} V_S dS = \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} W dt \right) V_S dS = \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\rho V_S^2}{2} \cdot \epsilon_{r\theta}^2 dt \right) V_S dS$$

onde \bar{W} é a média temporal de W

$$\bar{W} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} W dt \quad (3.59)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.60)$$

ou em função de γ_0 .

$$\boxed{dP = \frac{1}{4} \rho V_S^3 \gamma_0^2 r d\theta} \quad (3.66)$$

Considerando a relação (3.56)

$$\Omega = \Omega_z = \frac{1}{2} \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \gamma$$

Resulta:

$$\gamma = 2 \Omega \quad (3.67)$$

Chamando de $\bar{\Omega}$ o valor eficaz de Ω definido pela expressão abaixo:

$$\bar{\Omega} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Omega^2 dt} \quad (3.68)$$

onde:

$$\Omega = \Omega_0 \cos \omega t \quad (3.69)$$

Portanto:

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \quad (3.70)$$

Considerando a relação (3.67) conclui-se que:

$$\overline{\gamma} = 2 \overline{\Omega} \quad (3.71)$$

$$\gamma_0 = 2 \Omega_0 \quad (3.72)$$

Substituindo (3.71) e (3.72) nas equações (3.65) e (3.66), resultam as expressões da potência irradiada em função da rotação Ω

$$dP = 2 \rho V_S^3 \overline{\Omega}^2 r d\theta \quad (3.73)$$

$$dP = \rho V_S^3 \Omega_0^2 r d\theta \quad (3.74)$$

Para uma onda de tipo P (dilatacional) a potência irradiada por um setor elementar dP

$$dP = \overline{W} V_P dS = \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} W dt \right) V_P dS$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} W dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{2} \rho V_P^2 \epsilon^2 dt = \frac{1}{2} \rho V_P^2 \overline{\epsilon}^2$$

onde

$$\overline{\epsilon} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \epsilon^2 dt} \quad (3.75)$$

$\overline{\epsilon}$ é o valor eficaz de ϵ

onde $\epsilon = \epsilon_0 \cos \omega t$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}} \quad (3.76)$$

$$dP = \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} W dt \right) V_P dS = \frac{1}{2} \rho V_P^3 \bar{\epsilon}^2 dS = \frac{1}{2} \rho V_P^3 \bar{\epsilon}^2 r d\theta$$

A potência da onda dilatacional emitida pelo setor $d\theta$ resulta:

$$dP = \frac{1}{2} \rho V_P^3 \bar{\epsilon}^2 r d\theta \quad (3.77)$$

$$dP = \frac{1}{4} \rho V_P^3 \epsilon_0^2 r d\theta \quad (3.78)$$

III.2.3- Condições de Irradiação no Infinito para Determinação das Fases Iniciais ϕ_1 , ϕ_2 , ψ_1 e ψ_2

III.2.3.1 - Fórmulas Gerais Assintóticas para o Campo Distante

Consideremos o setor $d\theta$, da figura III.2. Vamos considerar uma seção normal dS_1 a distância r_1 ao centro do cilindro e outra seção normal dS a distância r , sendo que r e r_1 são muito maiores do que o raio do cilindro r_0 . Vamos calcular a potência irradiada por este setor $d\theta$, atravessando as seções dS e dS_1 a fim de fazer comparações entre os valores eficazes de Ω

e e nestas duas seções para inferirmos uma lei de variação daquelas grandezas com a coordenada r .

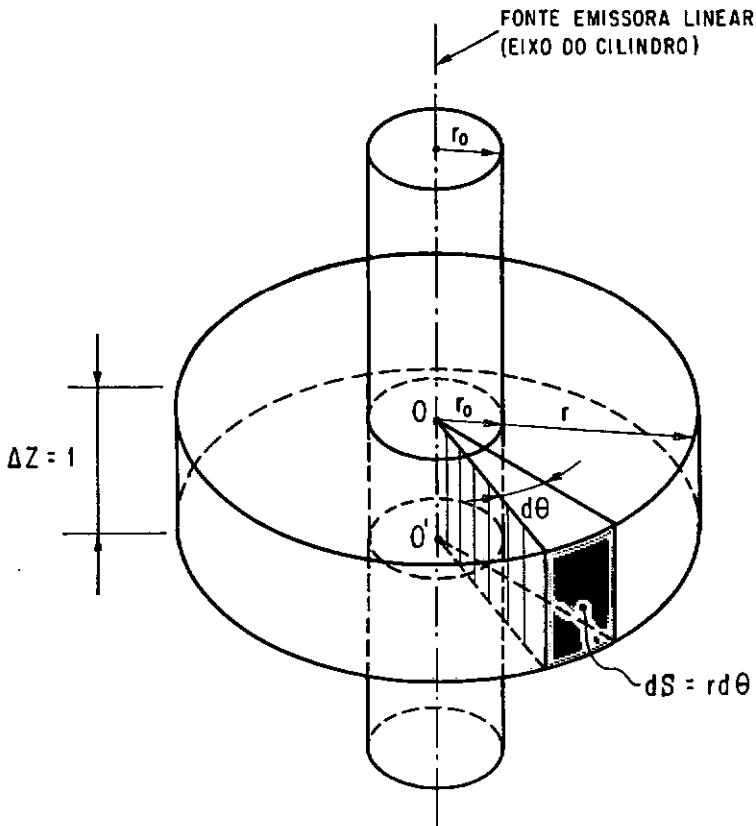


Figura III.3 - Área Elementar " dS " Atravessada por um Feixe Emissor de Energia.

O fluxo de energia que atravessa a seção dS é igual ao fluxo que atravessa a seção dS_1 . Este fluxo é igual a potência irradiada pelo setor angular $d\theta$.

$$dP_1 = dP \quad (3.79)$$

Aplicando (3.79) para a onda de cisalhamento

$$dP_1 = \rho V_S^3 \Omega_0^2(r_1, \theta) r_1 d\theta = \rho V_S^3 \Omega_0^2(r, \theta) r d\theta = dP$$

$$\Omega_0^2(r, \theta) r_1 = \Omega_0^2(r, \theta) r$$

$$\Omega_0(r, \theta) = \frac{\Omega_0(r_1, \theta) \sqrt{r_1}}{\sqrt{r}} \quad (3.80)$$

A expressão de Ω dada pela equação (3.5), para o caso de seção circular, possui apenas o termo de ordem Um . Este termo de acordo com a equação (3.4) é

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{\omega u_o}{V_s} \left[A_1 J_1 \left(\frac{\omega r}{V_s} \right) \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 Y_1 \left(\frac{\omega r}{V_s} \right) \cos(\omega t + \phi_2) \right] \sin \theta \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} \text{onde} \quad A_1 &= A_{11} & A_2 &= A_{12} \\ \phi_1 &= \phi_{11} & \phi_2 &= \phi_{12} \end{aligned}$$

As constantes A_1 , A_2 , ϕ_1 e ϕ_2 são as mesmas que aparecem nas equações (3.25) e (3.26), que dão os deslocamentos \bar{u} e \bar{v} para a onda de cisalhamento.

Observando a equação (3.81) nota-se que mantido r e t constantes, Ω é proporcional a $\sin \theta$. Então podemos escrever

$$\frac{\Omega(r_1, \theta)}{\Omega(r_1, \frac{\pi}{2})} = \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\pi}{2}} = \sin \theta$$

$$\text{Donde:} \quad \Omega(r_1, \theta) = \Omega(r_1, \frac{\pi}{2}) \sin \theta \quad (3.82)$$

Substituindo (3.82) em (3.80)

$$\Omega_o(r, \theta) = \frac{\Omega(r_1, \frac{\pi}{2}) \sqrt{r_1}}{\sqrt{r}} \cdot \sin \theta$$

onde: $b = \omega r / V_p$

Considerando que:

$$\epsilon = \text{Re} \left[\epsilon^* \cdot e^{i\omega t} \right]$$

onde:

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{\omega u_0}{V_p} \cos \theta \left[\{J_1(b) + Y_1(b)\} \cos \omega t - \{J_1(b) - Y_1(b)\} \sin \omega t \right] = \\ &= -\frac{\omega u_0}{V_p} \cos \theta \left[J_1(b) (\cos \omega t - \sin \omega t) + Y_1(b) (\cos \omega t + \sin \omega t) \right] \end{aligned}$$

donde:

$$\epsilon = -\frac{\omega u_0}{V_p} \cos \theta \left[\sqrt{2} J_1(b) \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} Y_1(b) \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

(3.153)

Lembrando que a expressão de ϵ , de acordo com a fórmula (3.85), é uma função dos parâmetros B_1 , B_2 , ϕ_1 e ϕ_2 , podemos determiná-los comparando as expressões (3.153) e (3.85).

A fórmula (3.85) pode ser reescrita em função de b .

$$\Omega_0(r, \theta) = \frac{C_\Omega}{\sqrt{r}} \sin \theta \quad (3.83)$$

onde

$$C_\Omega = \Omega(r_1, \frac{\pi}{2}) \sqrt{r_1}$$

Aplicando a equação (3.79) para a onda dilatacional

$$dP_1 = \frac{1}{4} \rho V_p^3 \epsilon_0^2(r_1, \theta) r_1 d\theta = \frac{1}{4} \rho V_p^3 \epsilon_0^2(r, \theta) r d\theta$$

Donde:

$$\epsilon_0^2(r_1, \theta) r_1 = \epsilon_0^2(r, \theta) r$$

$$\epsilon_0(r, \theta) = \epsilon_0(r_1, \theta) \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r}} \quad (3.84)$$

A expressão de ϵ dada pela equação (3.7), para o caso de seção circular, possui apenas o termo de ordem um. Este termo de acordo com a equação (3.6) é:

$$\epsilon = \frac{-\omega u_0}{V_p} \left[B_1 J_1 \left(\frac{\omega r}{V_p} \right) \cos(\omega t + \psi_1) + B_2 Y_1 \left(\frac{\omega r}{V_p} \right) \cos(\omega t + \psi_2) \right] \cos \theta \quad (3.85)$$

onde:

$$B_1 = B_{11} \qquad B_2 = B_{12}$$

$$\psi_1 = \psi_{11} \qquad \psi_2 = \psi_{12}$$

As constantes B_1 , B_2 , ψ_1 e ψ_2 são as mesmas constantes que aparecem nas equações (3.27) e (3.28) que dão os deslocamentos \bar{u} e \bar{v} da onda dilatacional.

Observando a equação (3.85) nota-se que mantido r e t constantes, ϵ é proporcional a $\cos\theta$. Então podemos escrever

$$\frac{\epsilon(r_1, \theta)}{\epsilon(r_1, 0)} = \frac{\cos \theta}{\cos 0} = \cos \theta$$

donde

$$\epsilon(r_1, \theta) = \epsilon(r_1, 0) \cos \theta \qquad (3.86)$$

Substituindo (3.86) em (3.84)

$$\epsilon_o(r, \theta) = \frac{\epsilon(r_1, 0) \sqrt{r_1}}{\sqrt{r}} \cos \theta$$

ou

$$\boxed{\epsilon_o(r, \theta) = - \frac{C_\epsilon}{\sqrt{r}} \cos \theta} \qquad (3.87)$$

onde

$$\boxed{C_\epsilon = - \epsilon(r_1, 0) \sqrt{r_1}}$$

Consideremos agora as expressões de Ω e ϵ , em função r , θ e t para grandes valores de r , para uma onda progressiva. Vamos determinar a forma geral das expressões para a onda S e a onda P, para pontos distantes da fonte emissora, considerando o fenômeno de irradiação pura. Na irradiação pura temos apenas on das progressivas. Não há ondas estacionárias que são típicas de reflexão.

A expressão de uma onda progressiva unidimensional (caso de uma barra, corda vibrante com uma extremidade livre, etc.) é do tipo abaixo

$$\Omega = \Omega_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{V_s} \right) + \phi \right] \quad (3.88)$$

onde V_s é a velocidade da onda.

No caso da onda unidimensional a amplitude Ω_0 do movimento permanece constante ao longo da distância x da fonte emissora. Já no caso da onda bidimensional, devido ao espreadamento do feixe emissor, sua seção cresce proporcionalmente a distância radial r , conseqüentemente a intensidade da onda, que é a potência por unidade de área da seção do feixe, diminuirá proporcionalmente ao inverso da distância. A intensidade sendo proporcional ao quadrado das deformações específicas implica que estas devem ser inversamente proporcionais a raiz quadrada da distância. É o que se pode constatar observando as equações (3.83) e (3.87) que fornecem as expressões de Ω_0 e ϵ_0 em função de r e θ .

Então a equação (3.88), substituindo x por r , assume a forma

$$\Omega = \Omega_0 (r, \theta) \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{v_s} \right) + \phi \right] \quad (3.89)$$

A equação (3.83) também pode ser escrita em função da distância radial adimensional (a)

$$\Omega_0 (r, \theta) = \frac{\bar{C}}{\sqrt{\pi a}} \sin \theta \quad (3.90)$$

onde
$$a = \frac{\omega r}{v_s} \quad (3.91)$$

Substituindo o valor de r em função de a , obtido de (3.91) na equação 3.89 obtemos

$$\Omega = \Omega_0 (r, \theta) \cos (\omega t - a + \phi) \quad (3.92)$$

Substituindo o valor de $\Omega_0 (r, \theta)$ da equação (3.90) em (3.92) resulta:

$$\boxed{\Omega = \frac{\bar{C} \sin \theta}{\sqrt{\pi a}} \cos (\omega t - a + \phi)} \quad (3.93)$$

Para a onda dilatacional podemos escrever uma equação análoga a (3.89).

$$\epsilon = \epsilon_0(r, \theta) \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{v_p} \right) + \psi \right] \quad (3.94)$$

Escrevendo a equação (3.87) em função da distância adimensional b

$$\epsilon_0(r, \theta) = \frac{-\bar{\bar{C}}}{\sqrt{\pi b}} \cos \theta \quad (3.95)$$

onde
$$b = \frac{\omega r}{v_p} \quad (3.96)$$

Substituindo (3.96) na equação (3.94), resulta:

$$\epsilon = \epsilon_0(r, \theta) \cos (\omega t - b + \psi) \quad (3.97)$$

Substituindo o valor de $\epsilon_0(r, \theta)$ da equação (3.95) na equação (3.97) resulta:

$$\boxed{\epsilon = - \frac{\bar{\bar{C}} \cdot \cos \theta}{\sqrt{\pi b}} \cos (\omega t - b + \psi)} \quad (3.98)$$

III.2.3.2- Expressões Gerais em Termos de Funções de Bessel

Demonstra-se que para grandes valores do argumento x , as funções de Bessel tendem para as seguintes fórmulas assintóticas.

$$J_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \quad (3.99)$$

$$Y_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \quad (3.100)$$

Fazendo $n = 1$

$$J_1(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) = - \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\cos x - \sin x)$$

$$Y_1(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) = - \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\cos x + \sin x)$$

Resultam as fórmulas:

$$J_1(x) \cong - \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\cos x - \sin x) \quad (3.101)$$

$$Y_1(x) \cong - \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\cos x + \sin x) \quad (3.102)$$

Tomemos a equação (3.93). Vamos expandir o fator em coseno que contém uma função do tempo e agrupar convenientemente os termos

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \frac{\bar{C} \cdot \text{sen } \theta}{\sqrt{\pi a}} \cdot \cos(\omega t - a + \phi) = \\
 &= \text{sen } \theta \left[\frac{\bar{C} \cos \phi}{\sqrt{\pi a}} \cos(\omega t - a) - \frac{\bar{C} \text{sen } \phi}{\sqrt{\pi a}} \text{sen}(\omega t - a) \right] \\
 \Omega &= \text{sen } \theta \left[C_1 \frac{\cos(\omega t - a)}{\sqrt{\pi a}} - C_2 \frac{\text{sen}(\omega t - a)}{\sqrt{\pi a}} \right] \quad (3.103)
 \end{aligned}$$

onde: $C_1 = \bar{C} \cos \phi$

$C_2 = \bar{C} \text{sen } \phi$

Expandindo os senos e cosenos de (3.103)

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \text{sen } \theta \left[C_1 \frac{\cos a \cos \omega t + \text{sen } a \text{sen} \omega t}{\sqrt{\pi a}} + C_2 \frac{\text{sen } a \cdot \cos \omega t - \cos a \cdot \text{sen} \omega t}{\sqrt{\pi a}} \right] \\
 \Omega &= \text{sen } \theta \left[\left(C_1 \frac{\cos a}{\sqrt{\pi a}} + C_2 \frac{\text{sen } a}{\sqrt{\pi a}} \right) \cos \omega t + \left(C_1 \frac{\text{sen } a}{\sqrt{\pi a}} - C_2 \frac{\cos a}{\sqrt{\pi a}} \right) \text{sen} \omega t \right] \\
 &\quad (3.104)
 \end{aligned}$$

onde: $C_1 = \bar{C} \cos \phi$

$C_2 = \bar{C} \text{sen } \phi$

Tomando-se a equação (3.98), que fornece a expressão de ϵ , e procedendo de maneira análoga obteremos para a onda dilatacional a seguinte equação:

$$\varepsilon = -\cos \theta \left[\left(C_3 \frac{\cos b}{\sqrt{\pi b}} + C_4 \frac{\sin b}{\sqrt{\pi b}} \right) \cos \omega t + \left(C_3 \frac{\sin b}{\sqrt{\pi b}} - C_4 \frac{\cos b}{\sqrt{\pi b}} \right) \sin \omega t \right] \quad (3.105)$$

onde: $C_3 = \bar{C} \cos \psi$

$C_4 = \bar{C} \sin \psi$

Vamos agora reescrever as equações (3.104) e (3.105) em termos de funções de Bessel, utilizando as equações (3.101) e (3.102).

Das equações (3.101) e (3.102) podemos deduzir a expressão do seno e do cosseno em termos de funções de Bessel, para grandes valores do argumento.

Somando (3.101) e (3.102) resulta:

$$\frac{\cos x}{\sqrt{\pi x}} \cong -\frac{1}{2} \left[J_1(x) + Y_1(x) \right] \quad (3.106)$$

Subtraindo (3.102) de (3.101) resulta:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi x}} \cong \frac{1}{2} \left[J_1(x) - Y_1(x) \right] \quad (3.107)$$

Empregando as propriedades das funções de Bessel dadas pelas relações (3.106) e (3.107) nas equações (3.104) e (3.105), resultam as seguintes:

$$\Omega = -C_1 \operatorname{sen} \theta \left[\frac{1}{2} \{J_1(a) + Y_1(a)\} \cos \omega t - \frac{1}{2} \{J_1(a) - Y_1(a)\} \operatorname{sen} \omega t \right] \\ + C_2 \operatorname{sen} \theta \left[\frac{1}{2} \{J_1(a) - Y_1(a)\} \cdot \cos \omega t + \frac{1}{2} \{J_1(a) + Y_1(a)\} \cdot \operatorname{sen} \omega t \right] \quad (3.108)$$

$$\epsilon = C_3 \cos \theta \left[\frac{1}{2} \{J_1(b) + Y_1(b)\} \cdot \cos \omega t - \frac{1}{2} \{J_1(b) - Y_1(b)\} \cdot \operatorname{sen} \omega t \right] \\ - C_4 \cos \theta \left[\frac{1}{2} \{J_1(b) - Y_1(b)\} \cdot \cos \omega t + \frac{1}{2} \{J_1(b) + Y_1(b)\} \cdot \operatorname{sen} \omega t \right] \quad (3.109)$$

III.3 - Abordagem com Números Complexos

III.3.1 - Conceitos Gerais

Em Eletricidade é costume representar as grandezas de variação senoidal ao longo do tempo por números complexos. Desse modo tensões e correntes são representados por números complexos. Impedâncias que são relações entre tensões complexas e correntes complexas são também grandezas complexas. Os números complexos são de grande utilidade para representar grandezas que são funções harmônicas do tempo, particularmente quando são do tipo mais simples, em que contêm apenas um único harmônico. Dada a frequência, a amplitude da oscilação da grandeza e o ângulo de fase, a função do tempo fica perfeitamente determinada. As fórmulas matemáticas que equacionam o problema ficam muito mais concisas.

No caso do problema da Teoria da Elasticidade as grandezas $\Omega(r, \theta, t)$, $\epsilon(r, \theta, t)$, $u(r, \theta, t)$, $v(r, \theta, t)$ também podem ser representadas por números complexos. A força por unidade de comprimento que age sobre a estaca e o deslocamento são as grandezas, que aqui desempenham o mesmo papel que a tensão e a corrente na Eletricidade. O conceito de impedância, analogamente, é aqui também empregado. Aqui a impedância é o quociente da força resistente do solo, pelo deslocamento sofrido pela estaca.

Denotando por $\text{Re} [\Omega^*]$ a parte real do número complexo Ω^* e $\text{Im} [\Omega^*]$ sua parte imaginária, pode-se escrever Ω^* em função de coeficientes A e B, reais.

$$\Omega^* = A + B_i \quad (3.110)$$

onde: $i = \sqrt{-1}$

$$A = \text{Re} [\Omega^*] \quad (3.111)$$

$$B = \text{Im} [\Omega^*] \quad (3.112)$$

Dada uma função senoidal $\Omega(t)$, qualquer, podemos encontrar uma função $\Omega^*(t)$ tal que sua parte real coincida com a função original. Poderia, também, ser usada a parte imaginária para representar a função.

A função $\Omega(t)$ pode ser genericamente expressa pela relação abaixo.

$$\Omega = C \cos(\omega t + \phi) \quad (3.113)$$

$$\Omega = A \cos \omega t - B \sin \omega t \quad (3.114)$$

onde:

$$A = C \cos \phi \quad (3.115)$$

$$B = C \sin \phi \quad (3.116)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \Omega &= \text{Re} [C e^{i(\omega t + \phi)}] = \text{Re} [C e^{i\phi} e^{i\omega t}] = \\ &= \text{Re} [C(\cos \phi + i \sin \phi) e^{i\omega t}] = \\ &= \text{Re} [(A + Bi) e^{i\omega t}] = \text{Re} [C^* e^{i\omega t}] \end{aligned}$$

$$\Omega(t) = \text{Re} \left[C^* e^{i\omega t} \right] \quad (3.117)$$

onde:

$$C^* = A + Bi \quad (3.118)$$

Definiremos a função complexa $\Omega^*(t)$, como a função que satisfaz a relação abaixo:

$$\Omega(t) = \text{Re} \left[\Omega^*(t) \right] \quad (3.119)$$

Comparando (3.119) com (3.117)

$$\Omega^*(t) = C^* e^{i\omega t}$$

(3.120)

No fenômeno ondulatório as grandezas físicas, deslocamentos, deformações específicas, rotação e tensões, variam senoidalmente com a mesma frequência e cada uma com a sua respectiva fase. Esta fase está implícita no argumento ϕ de C^* . Portanto, para se representar a variação no tempo de uma grandeza genérica $\Omega(t)$, podemos perfeitamente expressá-la através da constante complexa C^* , omitindo o fator $e^{i\omega t}$ da equação (3.120), uma vez que a frequência ω é suposta conhecida.

Desse modo, ao invés da função $\Omega^*(t)$, nos referiremos a constante Ω^* , para definir a variação no tempo da grandeza $\Omega(t)$ num determinado ponto de coordenadas r e θ , onde Ω^* é igual a C^* .

$$\Omega^* = C^* \quad (3.121)$$

Observe-se que a constante complexa Ω^* é constante apenas em relação ao tempo, podendo variar em função de outros parâmetros. As deformações específicas, rotações e tensões de fato variam com a posição do ponto, definida pelas coordenadas polares r e θ .

Assim para rotação Ω :

$$\Omega = \Omega(r, \theta, t)$$

$$\Omega^* = \Omega^*(r, \theta)$$

Vamos agora reescrever a equação (3.108), agrupando os termos em C_1 e em C_2 , colocando na forma da equação (3.114) as parcelas em C_1 e C_2 .

$$\begin{aligned} \Omega = & - C_1 \sin \theta \left[A_1 \cos \omega t - B_1 \sin \omega t \right] \\ & + C_2 \sin \theta \left[A_2 \cos \omega t - B_2 \sin \omega t \right] \end{aligned} \quad (3.122)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \{J_1(a) + Y_1(a)\} & B_1 &= \frac{1}{2} \{J_1(a) - Y_1(a)\} \\ A_2 &= \frac{1}{2} \{J_1(a) - Y_1(a)\} & B_2 &= -\frac{1}{2} \{J_1(a) + Y_1(a)\} \end{aligned}$$

Considerando que:

$$\begin{aligned} A_1 \cos \omega t - B_1 \sin \omega t &= \operatorname{Re} \left[(A_1 + i B_1) e^{i \omega t} \right] \\ A_2 \cos \omega t - B_2 \sin \omega t &= \operatorname{Re} \left[(A_2 + i B_2) e^{i \omega t} \right] \end{aligned}$$

a expressão de Ω^* fica

$$\Omega^* = -\text{sen } \theta \left[C_1(A_1 + i B_1) - C_2(A_2 + i B_2) \right] \quad (3.123)$$

onde:

$$(A_1 + i B_1) = \frac{1}{2} \left[\{J_1(a) + Y_1(a)\} + i \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \quad (3.124)$$

$$(A_2 + i B_2) = \frac{1}{2} \left[\{J_1(a) - Y_1(a)\} - i \{J_1(a) + Y_1(a)\} \right] \quad (3.125)$$

Reescrevendo (3.123)

$$\begin{aligned} \Omega^* &= -\text{sen } \theta (C_1 + i C_2) (A_1 + i B_1) = \\ &= -\text{sen } \theta (C_1 + i C_2) \cdot \frac{1}{2} \left[J_1(a) + Y_1(a) + i \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \\ \Omega^* &= -\frac{1}{2} C^* \text{sen } \theta \left[J_1(a) + Y_1(a) + i \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \quad (3.126) \end{aligned}$$

onde:

$$C^* = C_1 + i C_2$$

$$a = \frac{\omega r}{V_s}$$

Portanto:

$$\Omega^*(r, \theta) = -\frac{1}{2} C^* \sin \theta \left[J_1\left(\frac{\omega r}{V_s}\right) + Y_1\left(\frac{\omega r}{V_s}\right) + i \left\{ J_1\left(\frac{\omega r}{V_s}\right) - Y_1\left(\frac{\omega r}{V_s}\right) \right\} \right] \quad (3.127)$$

Para valores de r tendendo a infinito, a função $\Omega^*(r, \theta)$ tende assintoticamente para

$$\Omega^*(r, \theta) \cong C^* \sin \theta \cdot \frac{(\cos a - i \sin a)}{\sqrt{\pi a}} \quad (3.128)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Omega(r, \theta, t) &= \text{Re} \left[\Omega^*(r, \theta) \cdot e^{i\omega t} \right] = \frac{C^*}{\sqrt{\pi a}} \sin \theta e^{i(\omega t - a)} = \\ &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{\pi a}} \cdot \text{Re} \left[C^* \{ \cos(\omega t - a) + i \sin(\omega t - a) \} \right] = \\ &= \sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \left[C_1 \cos(\omega t - a) - C_2 \sin(\omega t - a) \right] \end{aligned}$$

$$\Omega(r, \theta, t) = C_1 \Omega_1 - C_2 \Omega_2 \quad (3.129)$$

onde:

$$\Omega_1 = \Omega_0 \sin \theta \cdot \frac{\cos(\omega t - a)}{\sqrt{\pi a}} \quad (3.130)$$

$$\Omega_2 = \Omega_0 \sin \theta \cdot \frac{\sin(\omega t - a)}{\sqrt{\pi a}} \quad (3.131)$$

Mas:

$$\Omega_1 = \text{Re} \left[\frac{\Omega_0 \sin \theta (\cos a - i \sin a)}{\sqrt{\pi a}} e^{i\omega t} \right] = \text{Re} \left[\Omega_1^* e^{i\omega t} \right]$$

$$\Omega_2 = \text{Re} \left[\frac{-\Omega_0 \sin \theta (\sin a + i \cos a)}{\sqrt{\pi a}} e^{i\omega t} \right] = \text{Re} \left[\Omega_2^* e^{i\omega t} \right]$$

donde:

$$\Omega_1^* = \frac{\Omega_0 \sin \theta (\cos a - i \sin a)}{\sqrt{\pi a}} \quad (3.132)$$

$$\Omega_2^* = \frac{-\Omega_0 \sin \theta (\sin a + i \cos a)}{\sqrt{\pi a}} \quad (3.133)$$

Comparando (3.132) e (3.133) pode-se observar que

$$\Omega_2^* = -i \Omega_1^* \quad (3.134)$$

Portanto a solução $\Omega_2^*(r, \theta)$ é uma combinação linear de $\Omega_1^*(r, \theta)$.

Consequentemente qualquer onda progressiva, independente de sua fase pode ser representada pela função $\Omega_1^*(r, \theta)$, multiplicada por uma constante complexa. A função $\Omega_2^*(r, \theta)$, em particular, é a função $\Omega_1^*(r, \theta)$ multiplicada pela constante $(-i)$. A fase inicial da onda de irradiação fica por conta da constante complexa C^* . Esta contém o ângulo de fase ϕ , embutido no seu argumento.

$$C^* = C(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (3.135)$$

Utilizando as relações (3.106) e (3.107) nas equações (3.132) e (3.133), as funções $\Omega_1^*(r, \theta)$ e $\Omega_2^*(r, \theta)$ ficarão expressas em termos de funções de Bessel, satisfazendo as condições assintóticas para r tendendo a infinito, para o caso de irradiação pura. Ω_2^* está atrasada de $\pi/2$ em relação a Ω_1^* .

Portanto, resultam:

$$\Omega_1^* \cong \Omega_0 \frac{\sin \theta (\cos a - i \sin a)}{\sqrt{\pi a}} \cong -\frac{1}{2} \Omega_0 \sin \theta \left[\{J_1(a) + Y_1(a)\} + \right. \\ \left. + i \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right]$$

$$\Omega_2^* \cong -\Omega_0 \frac{\sin \theta (\sin a + i \cos a)}{\sqrt{\pi a}} \cong -\frac{1}{2} \Omega_0 \sin \theta \left[\{J_1(a) - Y_1(a)\} - \right. \\ \left. - i \{J_1(a) + Y_1(a)\} \right]$$

onde $a = \frac{\omega r}{V_s}$

Portanto as expressões de Ω_1^* e Ω_2^* resultantes são

$$\Omega_1^* = -\frac{1}{2} \Omega_0 \sin \theta \left[\{J_1(a) + Y_1(a)\} + i \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \quad (3.136)$$

$$\Omega_2^* = -\frac{1}{2} \Omega_0 \sin \theta \left[\{J_1(a) - Y_1(a)\} - i \{J_1(a) + Y_1(a)\} \right] \quad (3.137)$$

Notar que os segundos membros de (3.136) e (3.137) constituem respectivamente as expressões complexas de Ω , correspondentes à equação (3.108) no caso particular em que C_1 é igual a Ω_0 e C_2 igual a zero, para Ω_1^* , e no caso em que C_1 é zero e C_2 é igual a $-\Omega_0$, relativo a expressão de Ω_2^* .

Desse modo:

$$\Omega_1 = \text{Re} \left[\Omega_1^* \cdot e^{i\omega t} \right] \quad (3.138)$$

$$\Omega_1 = \text{Re} \left[\Omega_2^* \cdot e^{i\omega t} \right] \quad (3.139)$$

Fazendo $C_1 = \Omega_0$ e $C_2 = 0$ na equação (3.108)

$$\Omega = \Omega_1 = -\frac{1}{2} \Omega_0 \sin \theta \left[\{J_1(a) + Y_1(a)\} \cos \omega t - \{J_1(a) - Y_1(a)\} \sin \omega t \right] \quad (3.140)$$

Fazendo $C_1 = 0$ e $C_2 = -\Omega_0$ na equação (3.108)

$$\Omega = \Omega_2 = -\frac{1}{2} \Omega_0 \sin \theta \left[\{J_1(a) - Y_1(a)\} \cos \omega t + \{J_1(a) + Y_1(a)\} \sin \omega t \right] \quad (3.141)$$

Portanto as equações (3.136) e (3.137) constituem soluções exatas da equação de onda para o caso de onda de cisalhamento, que satisfazem as condições de irradiação no infinito. Estas equações são a forma complexa das equações (3.140) e (3.141).

Observar nas equações (3.136) e (3.137) que:

$$\Omega_2^* = -i \Omega_1^*$$

verificando a equação (3.134).

$\Omega_2^*(r, \theta)$ é combinação linear de $\Omega_1^*(r, \theta)$. Portanto vamos considerar como solução para irradiação de ondas de cisalhamento, a seguinte:

$$\Omega^* = C^* \Omega_1^*$$

ou

$$\Omega = -\frac{1}{2} C^* \Omega_0 \sin \theta \left[\{J_1(a) + Y_1(a)\} + i\{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \quad (3.142)$$

onde C^* é uma constante complexa.

Considerando $C^* = -2$, resulta:

$$\Omega^* = \Omega_0 \sin \theta \left[\{J_1(a) + Y_1(a)\} + i\{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \quad (3.143)$$

onde

$$a = \frac{\omega r}{V_s}$$

De modo análogo, a expressão da deformação volumétrica ϵ , para o caso de irradiação de ondas dilatacionais resulta:

$$\epsilon^* = -\epsilon_0 \cos \theta \left[\{J_1(b) + Y_1(b)\} + i\{J_1(b) - Y_1(b)\} \right] \quad (3.144)$$

III.3.2-Deslocamentos Produzidos pela Onda de Cisalhamento

Consideremos na equação (3.143)

$$\Omega_0 = \frac{1}{2} \frac{\omega u_0}{V_s}$$

Substituindo Ω_0 na equação (3.143) resulta

$$\Omega^* = \frac{1}{2} \frac{\omega u_0}{V_s} \cdot \sin \theta \left[\{J_1(a) + Y_1(a)\} + i\{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \quad (3.145)$$

onde $a = \omega r / V_s$

Considerando que:

$$\Omega = \text{Re} \left[\Omega^* \cdot e^{i\omega t} \right]$$

onde:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} \frac{\omega u_0}{V_s} \sin \theta \left[\{J_1(a) + Y_1(a)\} \cos \omega t - \{J_1(a) - Y_1(a)\} \sin \omega t \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega u_0}{V_s} \sin \theta \left[J_1(a)(\cos \omega t - \sin \omega t) + Y_1(a)(\cos \omega t + \sin \omega t) \right] \end{aligned}$$

donde:

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{\omega u_0}{v_s} \sin \theta \left[\sqrt{2} J_1(a) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} Y_1(a) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (3.146)$$

Lembrando que a expressão de Ω , de acordo com a fórmula (3.81), é uma função dos parâmetros A_1 , A_2 , ϕ_1 e ϕ_2 , podemos determiná-los comparando as expressões, (3.146) e (3.81).

A fórmula (3.81) pode ser reescrita, em função de a .

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{\omega u_0}{v_s} \sin \theta \left[A_1 J_1(a) \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 Y_1(a) \cos(\omega t + \phi_2) \right] \quad (3.147)$$

Comparando (3.146) e (3.147), conclui-se que:

$$A_1 = \sqrt{2} \quad A_2 = \sqrt{2}$$

$$\phi_1 = \pi/4 \quad \phi_2 = -\pi/4$$

Substituindo os valores de A_1 , A_2 , ϕ_1 e ϕ_2 na fórmula (3.25), obtem-se os deslocamentos radiais u , para a onda de cisalhamento.

$$\begin{aligned} u = \bar{u} &= u_0 \cos \theta \left[A_1 \frac{1}{a} J_1(a) \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \frac{1}{a} Y_1(a) \cos(\omega t + \phi_2) \right] = \\ &= u_0 \cos \theta \left[\sqrt{2} \frac{1}{a} J_1(a) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \frac{1}{a} Y_1(a) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

$$u = u_0 \cos \theta \left[\frac{1}{a} \{J_1(a) + Y_1(a)\} \cos \omega t - \frac{1}{a} \{J_1(a) - Y_1(a)\} \sin \omega t \right] \quad (3.148)$$

Passando a fórmula (3.148) para a notação complexa resulta:

$$u = \operatorname{Re} [u \cdot e^{i\omega t}]$$

$$u^* = u_0 \cos \theta \left[\frac{1}{a} \{J_1(a) + Y_1(a)\} + i \frac{1}{a} \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right]$$

(3.149)

Substituindo os valores de A_1 , A_2 , ϕ_1 e ϕ_2 na fórmula (3.26), obtem-se os deslocamentos tangenciais (v).

$$\begin{aligned} v = \bar{v} = -u_0 \sin \theta & \left[A_1 \left\{ J_0(a) - \frac{1}{a} J_1(a) \right\} \cos(\omega t + \phi_1) + \right. \\ & \left. + A_2 \left\{ Y_0(a) - \frac{1}{a} Y_1(a) \right\} \cos(\omega t + \phi_2) \right] = \\ = -u_0 \sin \theta & \left[\sqrt{2} \left\{ J_0(a) - \frac{1}{a} J_1(a) \right\} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ & \left. + \sqrt{2} \left\{ Y_0(a) - \frac{1}{a} Y_1(a) \right\} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

$$v = -u_0 \sin \theta \left[\left\{ J_0(a) + Y_0(a) \right\} - \frac{1}{a} \{J_1(a) + Y_1(a)\} \right] \cdot \cos \omega t - \dots$$

(continua na página seguinte)

$$\dots - \left[\{J_0(a) - Y_0(a)\} - \frac{1}{a} \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \cdot \sin \omega t \quad (3.150)$$

Passando a fórmula (3.150) para a notação complexa

$$v = \operatorname{Re} [v^* e^{i\omega t}]$$

$$v^* = -u_0 \sin \theta \left[\left[\{J_0(a) + Y_0(a)\} - \frac{1}{a} \{J_1(a) + Y_1(a)\} \right] + \right. \\ \left. + i \left[\{J_0(a) - Y_0(a)\} - \frac{1}{a} \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \right]$$

(3.151)

III.33 - Deslocamentos Produzidos pela Onda Dilatacional

Consideremos na equação (3.144)

$$\epsilon_0 = \frac{\omega u_0}{v_p}$$

Substituindo ϵ_0 na equação (3.144) resulta:

$$\epsilon^* = -\frac{\omega u_0}{v_p} \cos \theta \left[J_1(b) + Y_1(b) + i \{J_1(b) - Y_1(b)\} \right] \quad (3.152)$$

onde

$$b = \omega r / V_p$$

Considerando que:

$$\epsilon = \text{Re} \left[\epsilon^* \cdot e^{i\omega t} \right]$$

onde:

$$\begin{aligned} \epsilon &= - \frac{\omega u_0}{V_p} \cos \theta \left[\{J_1(b) + Y_1(b)\} \cos \omega t - \{J_1(b) - Y_1(b)\} \sin \omega t \right] = \\ &= - \frac{\omega u_0}{V_p} \cos \theta \left[J_1(b)(\cos \omega t - \sin \omega t) + Y_1(b)(\cos \omega t + \sin \omega t) \right] \end{aligned}$$

donde:

$$\epsilon = - \frac{\omega u_0}{V_p} \cos \theta \left[\sqrt{2} J_1(b) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} Y_1(b) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

(3.153)

Lembrando que a expressão de ϵ , de acordo com a fórmula (3.85), é uma função dos parâmetros B_1 , B_2 , ϕ_1 e ϕ_2 , podemos determiná-los comparando as expressões (3.153) e (3.85).

A fórmula (3.85) pode ser reescrita em função de b .

$$\epsilon = - \frac{\omega u_0 \cos \theta}{v_p} \left[B_1 J_1(b) \cos(\omega t + \psi_1) + B_2 Y_1(b) \cos(\omega t + \psi_2) \right] \quad (3.154)$$

Comparando (3.153) e (3.154) conclui-se que:

$$B_1 = \sqrt{2} \quad B_2 = \sqrt{2}$$

$$\psi_1 = \pi/4 \quad \psi_2 = -\pi/4$$

Substituindo os valores de B_1 , B_2 , ψ_1 e ψ_2 na fórmula (3.27), obtem-se os deslocamentos radiais u , para a onda dilatacional

$$u = \bar{u} = u_0 \cos \theta \left[B_1 \left\{ J_0(b) - \frac{1}{b} J_1(b) \right\} \cos(\omega t + \psi_1) + \right. \\ \left. + B_2 \left\{ Y_0(b) - \frac{1}{b} Y_1(b) \right\} \cos(\omega t + \psi_2) \right] =$$

$$= u_0 \cos \theta \left[\sqrt{2} \left\{ J_0(b) - \frac{1}{b} J_1(b) \right\} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ \left. + \sqrt{2} \left\{ Y_0(b) - \frac{1}{b} Y_1(b) \right\} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$u = u_0 \cos \theta \left[\left[\left\{ J_0(b) + Y_0(b) \right\} - \frac{1}{b} \left\{ J_1(b) + Y_1(b) \right\} \right] \cos \omega t - \right. \\ \left. - \left[\left\{ J_0(b) - Y_0(b) \right\} - \frac{1}{b} \left\{ J_1(b) - Y_1(b) \right\} \right] \sin \omega t \right] \quad (3.155)$$

Passando agora a fórmula (3.155) para a notação complexa

$$u = \operatorname{Re} [u^* \cdot e^{i\omega t}]$$

$$u^* = u_0 \cos \theta \left[\left\{ J_0(b) + Y_0(b) \right\} - \frac{1}{b} \left\{ J_1(b) + Y_1(b) \right\} \right] + \\ + i \left[\left\{ J_0(b) - Y_0(b) \right\} - \frac{1}{b} \left\{ J_1(b) - Y_1(b) \right\} \right]$$

(3.156)

Substituindo os valores de B_1 , B_2 , ψ_1 e ψ_2 na fórmula (3.28), obtem-se os deslocamentos tangenciais (v).

$$v = \bar{v} = - u_0 \sin \theta \left[B_1 \frac{1}{b} J_1(b) \cos(\omega t + \psi_1) + B_2 \frac{1}{b} Y_1(b) \cos(\omega t + \psi_2) \right] =$$

$$= - u_0 \sin \theta \left[\sqrt{2} \frac{1}{b} J_1(b) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \frac{1}{b} Y_1(b) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$v = - u_0 \sin \theta \left[\frac{1}{b} \{ J_1(b) + Y_1(b) \} \cos \omega t - \frac{1}{b} \{ J_1(b) - Y_1(b) \} \sin \omega t \right]$$

(3.157)

Passando agora a fórmula (3.157) para a notação complexa.

$$v = \text{Re} \left[v^* \cdot e^{i\omega t} \right]$$

$$v^* = -u_0 \sin \theta \left[\frac{1}{b} \{J_1(b) + Y_1(b)\} + i \frac{1}{b} \{J_1(b) - Y_1(b)\} \right]$$

(3.158)

III.3.4 - Condições de Contorno ao Longo do Perímetro da Seção do Cilindro

Os deslocamentos u e v , em qualquer ponto do meio elástico são resultantes da composição dos deslocamentos u_1 e v_1 de uma onda de cisalhamento com os deslocamentos u_2 e v_2 de uma onda dilatacional.

Usando a notação complexa, os deslocamentos resultantes u^* e v^* podem ser escritos como combinação linear dos deslocamentos u_1^* e u_2^* , e v_1^* e v_2^* respectivamente, onde u_1^* e v_1^* são os deslocamentos da onda de cisalhamento e u_2^* e v_2^* são os deslocamentos da onda dilatacional.

$$u^* = C_1^* u_1^* + C_2^* u_2^* \quad (3.159)$$

$$v^* = C_1^* v_1^* + C_2^* v_2^* \quad (3.160)$$

onde C_1^* e C_2^* são constantes a serem determinadas, u_1^* e v_1^* são os deslocamentos u^* e v^* dados pelas equações (3.149) e (3.151), u_2^* e v_2^* os deslocamentos u^* e v^* dados pelas equações (3.156) e

(3.158).

Os deslocamentos da onda de cisalhamento, como foram vistos no item 3.3 são, de acordo com (3.149) e (3.151).

$$u_1^* = u_0 \cos \theta \left[\frac{1}{a} \{J_1(a) + Y_1(a)\} + i \frac{1}{a} \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \quad (3.161)$$

$$v_1^* = - u_0 \sin \theta \left[\left[\{J_0(a) + Y_0(a)\} - \frac{1}{a} \{J_1(a) + Y_1(a)\} \right] + \right. \\ \left. + i \left[\{J_0(a) - Y_0(a)\} - \frac{1}{a} \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \right] \quad (3.162)$$

Os deslocamentos da onda dilatacional, como foram vistos no item 3.4 são, de acordo com (3.156) e (3.158).

$$u_2^* = u_0 \cos \theta \left[\left[\{J_0(b) + Y_0(b)\} - \frac{1}{b} \{J_1(b) + Y_1(b)\} \right] + \right. \\ \left. + i \left[\{J_0(b) - Y_0(b)\} - \frac{1}{b} \{J_1(b) - Y_1(b)\} \right] \right] \quad (3.163)$$

$$v_2^* = - u_0 \sin \theta \left[\frac{1}{b} \{J_1(b) + Y_1(b)\} + i \frac{1}{b} \{J_1(b) - Y_1(b)\} \right] \quad (3.164)$$

O movimento do cilindro é considerado harmônico simples na direção do eixo x . O deslocamento u_0 do centro do cilindro é dado pela fórmula (3.1).

$$u_c = u_0 \cos \omega t$$

No contorno do cilindro todos os pontos tem o mesmo deslocamento na mesma direção e sentido que o centro do cilindro (fig. III.4).

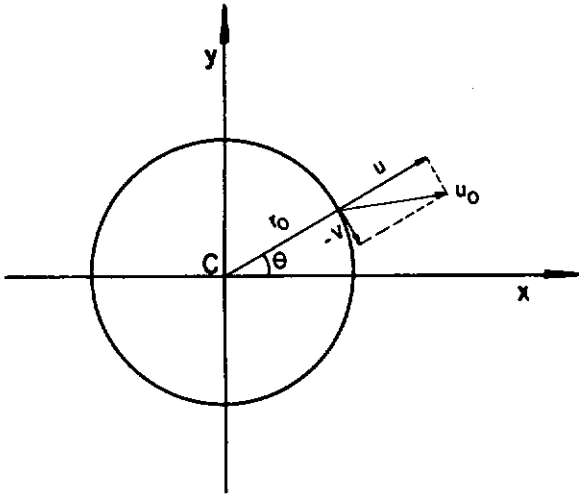


Figura III.4 - Deslocamentos no Contorno da Seção.

Chamado de \bar{u} e \bar{v} , os deslocamentos u e v ao longo do contorno, são válidas as relações:

$$\bar{u}(\theta) = u(r_0, \theta) = u_0 \cos \theta \cos \omega t \quad (3.164)$$

$$\bar{v}(\theta) = v(r_0, \theta) = -u_0 \sin \theta \cos \omega t \quad (3.165)$$

Passando para a notação complexa:

$$\bar{u}^*(\theta) = u^*(r_0, \theta) = u_0 \cos \theta \quad (3.166)$$

$$\bar{v}^*(\theta) = v^*(r_0, \theta) = -u_0 \sin \theta \quad (3.167)$$

onde:

$$u^*(r_o, \theta) = C_1^* u_1^*(r_o, \theta) + C_2^* u_2^*(r_o, \theta) \quad (3.168)$$

$$v^*(r_o, \theta) = C_1^* v_1^*(r_o, \theta) + C_2^* v_2^*(r_o, \theta) \quad (3.169)$$

Os deslocamentos $u_1^*(r_o, \theta)$ e $v_1^*(r_o, \theta)$ podem ser expressos como:

$$u_1^*(r_o, \theta) = U_1^* \cos \theta \quad (3.170)$$

$$v_1^*(r_o, \theta) = -V_1^* \sin \theta \quad (3.171)$$

onde:

$$U_1^* = \frac{u_o}{a_o} \left[\{J_1(a_o) + Y_1(a_o)\} + i \{J_1(a_o) - Y_1(a_o)\} \right] \quad (3.172)$$

$$\begin{aligned} V_1^* = u_o \left[\left\{ \{J_o(a_o) + Y_o(a_o)\} - \frac{1}{a_o} \{J_1(a_o) + Y_1(a_o)\} \right\} + \right. \\ \left. + i \left\{ \{J_o(a_o) - Y_o(a_o)\} - \frac{1}{a_o} \{J_1(a_o) - Y_1(a_o)\} \right\} \right] \quad (3.173) \end{aligned}$$

onde
$$a_o = \frac{\omega r_o}{v_s}$$

Os deslocamentos $u_2^*(r_o, \theta)$ e $v_2^*(r_o, \theta)$ podem ser expressos como:

$$u_2^*(r_o, \theta) = U_2^* \cos \theta \quad (3.174)$$

$$v_2^*(r_o, \theta) = -V_2^* \sin \theta \quad (3.175)$$

onde:

$$U_2^* = u_o \left[\left[\{J_o(b_o) + Y_o(b_o)\} - \frac{1}{b_o} \{J_1(b_o) + Y_1(b_o)\} \right] + i \left[\{J_o(b_o) - Y_o(b_o)\} - \frac{1}{b_o} \{J_1(b_o) - Y_1(b_o)\} \right] \right] \quad (3.176)$$

$$V_2^* = \frac{u_o}{b_o} \left[\{J_1(b_o) + Y_1(b_o)\} + i \{J_1(b_o) - Y_1(b_o)\} \right] \quad (3.177)$$

onde: $b_o = \frac{\omega r_o}{v_p}$

Substituindo os valores de $u^*(r_o, \theta)$ de (3.168) e de $v^*(r_o, \theta)$ de (3.169) nas equações (3.166) e (3.167), montamos o sistema linear de equações que resolvido fornece os valores de C_1^* e C_2^* .

$$\begin{cases} C_1^* u_1^*(r_o, \theta) + C_2^* u_2^*(r_o, \theta) = u_o \cos \theta \end{cases} \quad (3.178)$$

$$\begin{cases} C_1^* v_1^*(r_o, \theta) + C_2^* v_2^*(r_o, \theta) = -u_o \sin \theta \end{cases} \quad (3.179)$$

Substituindo (3.170) e (3.174) em (3.178), e (3.171) e (3.175) em (3.179).

$$\begin{cases} C_1^* U_1^* \cos \theta + C_2^* U_2^* \cos \theta = u_0 \cos \theta \\ C_1^* V_1^* \sin \theta + C_2^* V_2^* \sin \theta = u_0 \sin \theta \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} U_1^* C_1^* + U_2^* C_2^* = u_0 & (3.180) \\ V_1^* C_1^* + V_2^* C_2^* = u_0 & (3.181) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear dado pelas equações (3.180) e (3.181) encontramos os valores de C_1^* e C_2^* .

$$C_1^* = \frac{A}{C} \quad (3.182)$$

$$C_2^* = \frac{B}{C} \quad (3.183)$$

onde:

$$\begin{aligned} A = & \left[2 a_0 \{J_1(b_0) + Y_1(b_0)\} - a_0 b_0 \{J_0(b_0) + Y_0(b_0)\} \right] \\ & + i \left[2 a_0 \{J_1(b_0) - Y_1(b_0)\} - a_0 b_0 \{J_0(b_0) - Y_0(b_0)\} \right] \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} B = & \left[2 b_0 \{J_1(a_0) + Y_1(a_0)\} - a_0 b_0 \{J_0(a_0) + Y_0(a_0)\} \right] \\ & + i \left[2 b_0 \{J_1(a_0) - Y_1(a_0)\} - a_0 b_0 \{J_0(a_0) - Y_0(a_0)\} \right] \end{aligned} \quad (3.185)$$

$$\begin{aligned}
C = & 2 \left[a_0 \{ J_0(a_0) Y_1(b_0) + Y_0(a_0) J_1(b_0) \} + b_0 \{ J_0(b_0) Y_1(a_0) + \right. \\
& + Y_0(b_0) J_1(a_0) \} - a_0 b_0 \{ J_0(a_0) Y_0(b_0) + Y_0(a_0) J_0(b_0) \} \left. \right] \\
& + 2i \left[a_0 \{ J_0(a_0) J_1(b_0) - Y_0(a_0) Y_1(b_0) \} + b_0 \{ J_0(b_0) J_1(a_0) - \right. \\
& - Y_0(b_0) Y_1(a_0) \} - a_0 b_0 \{ J_0(a_0) J_0(b_0) - Y_0(a_0) Y_0(b_0) \} \left. \right]
\end{aligned}$$

(3.186)

IV. CÁLCULO DA REAÇÃO DO SOLO SOBRE O CILINDRO

IV.1 - Deformações Específicas

Para se calcular a força exercida pelo solo por unidade de comprimento do cilindro, deve-se calcular as tensões na superfície do mesmo, integrando-se em seguida ao longo do perímetro para se obter a resultante. Mas para obtermos as tensões é necessário antes calcular as deformações específicas para o cálculo das tensões pelas relações constitutivas.

As deformações específicas são funções dos deslocamentos. As deformações específicas relevantes são ϵ_r , ϵ_θ e $\epsilon_{r\theta}$ que serão consideradas nesse estudo como números complexos, ϵ_r^* , ϵ_θ^* e $\epsilon_{r\theta}^*$. As relações que fornecem as deformações específicas em função dos deslocamentos são dadas abaixo:

$$\epsilon_r^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} \quad (4.1)$$

$$\epsilon_\theta^* = \frac{u^*}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \quad (4.2)$$

$$\epsilon_{r\theta}^* = \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v^*}{\partial r} - \frac{v^*}{r} \quad (4.3)$$

Considerando que os deslocamentos resultantes são uma combinação linear dos deslocamentos de uma onda de cisalhamento com os de uma onda dilatacional, pode-se calcular as deformações específicas, calculando-se separadamente as deformações es

pecíficas de cada tipo de onda e em seguida combinando-se estas linearmente.

$$u^* = C_1^* u_1^* + C_2^* u_2^* \quad (4.4)$$

$$v^* = C_1^* v_1^* + C_2^* v_2^* \quad (4.5)$$

Então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_r^* = C_1^* \epsilon_{r_1}^* + C_2^* \epsilon_{r_2}^* \end{array} \right. \quad (4.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_\theta^* = C_1^* \epsilon_{\theta_1}^* + C_2^* \epsilon_{\theta_2}^* \end{array} \right. \quad (4.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{r\theta}^* = C_1^* \epsilon_{r\theta_1}^* + C_2^* \epsilon_{r\theta_2}^* \end{array} \right. \quad (4.8)$$

onde:

$$\epsilon_{r_1}^* = \frac{\partial u_1^*}{\partial r} \quad (4.9)$$

$$\epsilon_{r_2}^* = \frac{\partial u_2^*}{\partial r} \quad (4.10)$$

$$\epsilon_{\theta_1}^* = \frac{u_1^*}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1^*}{\partial \theta} \quad (4.11)$$

$$\epsilon_{\theta_2}^* = \frac{u_2^*}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} \quad (4.12)$$

$$\epsilon_{r\theta_1}^* = \frac{1}{r} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1^*}{\partial \theta} - \frac{v_1^*}{r} \quad (4.13)$$

$$\epsilon_{r\theta_2}^* = \frac{1}{r} \frac{\partial u_2^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} - \frac{v_2^*}{r} \quad (4.14)$$

Utilizando as relações (4.9), (4.11) e (4.13), calculamos as deformações específicas da onda de cisalhamento*.

$$\epsilon_1^* = \epsilon_{r_1}^* + \epsilon_{\theta_1}^* \equiv 0 \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{r_1}^* &= \frac{u_0}{r_0} \cos \theta \frac{a_0}{a} \left[J_0(a) + Y_0(a) - \frac{2}{a} \{J_1(a) + Y_1(a)\} \right] \\ &+ i \frac{u_0}{r_0} \cos \theta \frac{a_0}{a} \left[J_0(a) - Y_0(a) - \frac{2}{a} \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{r_{\theta_1}}^* &= 2 \frac{u_0}{r_0} \sin \theta \frac{a_0}{a} \left[J_0(a) + Y_0(a) - \frac{2}{a} \{J_1(a) + Y_1(a)\} + \frac{1}{2} a \{J_1(a) + \right. \\ &\left. + Y_1(a)\} \right] + 2 i \frac{u_0}{r_0} \sin \theta \frac{a_0}{a} \left[J_0(a) - Y_0(a) - \frac{2}{a} \{J_1(a) - Y_1(a)\} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} a \{J_1(a) - Y_1(a)\} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Utilizando as relações (4.10), (4.12) e (4.14), calculamos as deformações específicas da onda dilatacional .

$$\epsilon_2^* = \epsilon_{r_2}^* + \epsilon_{\theta_2}^* \quad (4.18)$$

$$\epsilon_2^* = - \frac{u_0}{r_0} \cos \theta b_0 \left[J_1(b) + Y_1(b) + i \{J_1(b) - Y_1(b)\} \right] \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r_2}^* = & - \frac{u_0}{r_0} \cos \theta \frac{b_0}{b} \left[J_0(b) + Y_0(b) + \left(b - \frac{2}{b}\right) \{J_1(b) + Y_1(b)\} \right] \\ & - i \frac{u_0}{r_0} \cos \theta \frac{b_0}{b} \left[J_0(b) - Y_0(b) + \left(b - \frac{2}{b}\right) \{J_1(b) - Y_1(b)\} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\theta_2}^* = & - 2 \frac{u_0}{r_0} \sin \theta \frac{b_0}{b} \left[J_0(b) + Y_0(b) - \frac{2}{b} \{J_1(b) + Y_1(b)\} \right] \\ & - 2i \frac{u_0}{r_0} \sin \theta \frac{b_0}{b} \left[J_0(b) - Y_0(b) - \frac{2}{b} \{J_1(b) - Y_1(b)\} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para o cálculo da força sobre o cilindro, interessam apenas as tensões ao longo de sua superfície; consequentemente basta conhecer as deformações específicas ao longo da superfície cilíndrica. Para se obter estas deformações na superfície de contorno, basta fazer "r" igual a "r₀", fazendo "a" igual a "a₀" e "b" igual a "b₀" nas fórmulas (4.15) a (4.21).

Portanto as deformações ao nível do contorno, para a onda de cisalhamento são:

$$\boxed{\varepsilon_i^* = 0} \quad (4.22)$$

$$\epsilon_{r_1}^* = \frac{u_0}{r_0} \cos \theta \left[J_0(a_0) + Y_0(a_0) - \frac{2}{a_0} \{J_1(a_0) + Y_1(a_0)\} \right] + i \frac{u_0}{r_0} \cos \theta \left[J_0(a_0) - Y_0(a_0) - \frac{2}{a_0} \{J_1(a_0) - Y_1(a_0)\} \right]$$

(4.23)

$$\epsilon_{r\theta_1}^* = 2 \frac{u_0}{r_0} \sin \theta \left[J_0(a_0) + Y_0(a_0) - \frac{2}{a_0} \{J_1(a_0) + Y_1(a_0)\} + \frac{1}{2} a_0 \{J_1(a_0) + Y_1(a_0)\} \right] + 2 i \frac{u_0}{r_0} \sin \theta \left[J_0(a_0) - Y_0(a_0) - \frac{2}{a_0} \{J_1(a_0) - Y_1(a_0)\} + \frac{1}{2} a_0 \{J_1(a_0) - Y_1(a_0)\} \right]$$

(4.24)

As deformações específicas ao nível do contorno, para a onda dilatacional são:

$$\epsilon_2^* = - \frac{u_0}{r_0} \cos \theta b_0 \left[J_1(b_0) + Y_1(b_0) + i \{J_1(b_0) - Y_1(b_0)\} \right]$$

(4.25)

$$\begin{aligned} \epsilon_{r_2}^* = & - \frac{u_0}{r_0} \cos \theta \left[J_0(b_0) + Y_0(b_0) + \left(b_0 - \frac{2}{b_0}\right) \{J_1(b_0) + Y_1(b_0)\} \right] \\ & - i \frac{u_0}{r_0} \cos \theta \left[J_0(b_0) - Y_0(b_0) + \left(b_0 - \frac{2}{b_0}\right) \{J_1(b_0) - Y_1(b_0)\} \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{r\theta_2}^* = & - 2 \frac{u_0}{r_0} \sin \theta \left[J_0(b_0) + Y_0(b_0) - \frac{2}{b_0} \{J_1(b_0) + Y_1(b_0)\} \right] \\ & - 2 i \frac{u_0}{r_0} \sin \theta \left[J_0(b_0) - Y_0(b_0) - \frac{2}{b_0} \{J_1(b_0) - Y_1(b_0)\} \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

IV.2 - Tensões na Superfície do Cilindro

As tensões que interessam para calcular a força resultante que age sobre o cilindro são σ_r e $\tau_{r\theta}$. Estas são calculadas pelas fórmulas (1.15) e (1.18) do Capítulo I.

Recapitulando as fórmulas que dão σ_r e $\tau_{r\theta}$ são dados em notação complexa:

$$\sigma_r^* = \lambda \epsilon^* + 2 G \epsilon_r^* \quad (4.28)$$

$$\tau_{r\theta}^* = G \epsilon_{r\theta}^* \quad (4.29)$$

onde
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.30)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \lambda \epsilon^* + 2G \epsilon_r^* = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon^* + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_r^* = \\ &= \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{E}{(1-\nu)} \epsilon^* + 2 \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_r^* = \\ &= \rho V_p^2 \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \epsilon^* + 2 \rho V_s^2 \epsilon_r^* \end{aligned}$$

Substituindo o valor de ν em função de α , segundo relação (3.46):

$$\sigma_r^* = \rho V_p^2 \left[(1 - 2\alpha^2) \epsilon^* + 2\alpha^2 \epsilon_r^* \right] \quad (4.32)$$

onde:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}} = \frac{V_s}{V_p} = \frac{b_o}{a_o}$$

Modificando a relação (4.32)

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \frac{\rho V_s^2}{\alpha^2} \left[(1 - 2\alpha^2) \epsilon^* + 2\alpha^2 \epsilon_r^* \right] = \frac{G}{\alpha^2} \left[(1-2\alpha^2) \epsilon^* + 2\alpha^2 \epsilon_r^* \right] \\ \sigma_r^* &= \frac{G}{\alpha^2} \left[(1 - 2\alpha^2) \epsilon^* + 2\alpha^2 \epsilon_r^* \right] \quad (4.33) \end{aligned}$$

Substituindo $\alpha = b_0/a_0$ em (4.33)

$$\sigma_r^* = G \left[\left(\frac{a_0^2}{b_0^2} - 2 \right) \epsilon^* + 2 \epsilon_r^* \right] \quad (4.34)$$

A tensão de cisalhamento fica

$$\tau_{r\theta}^* = G \epsilon_{r\theta}^* \quad (4.35)$$

Lembrando que:

$$\epsilon^* = C_1^* \epsilon_1^* + C_2^* \epsilon_2^* \quad (4.36)$$

$$\epsilon_r^* = C_1^* \epsilon_{r1}^* + C_2^* \epsilon_{r2}^* \quad (4.37)$$

$$\epsilon_{r\theta}^* = C_1^* \epsilon_{r\theta_1}^* + C_2^* \epsilon_{r\theta_2}^* \quad (4.38)$$

E substituindo os valores de ϵ_1^* , ϵ_{r1}^* e $\epsilon_{r\theta_1}^*$ dadas pelas relações (4.22), (4.23) e (4.24) e os valores de ϵ_2^* , ϵ_{r2}^* e $\epsilon_{r\theta_2}^*$ dadas pelas relações (4.25), (4.26) e (4.27) nas equações (4.36), (4.37) e (4.38) obtemos as deformações específicas resultantes ϵ^* , ϵ_r^* e $\epsilon_{r\theta}^*$. As constantes C_1^* e C_2^* são dadas pelas fórmulas (3.182) e (3.183).

Substituindo as deformações específicas em (4.34) obtem-se a tensão normal σ_r^* .

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^* = & 2G.C_1^* \frac{u_o \cos \theta}{r_o} \left[\left[J_0(a_o) + Y_0(a_o) + i\{J_0(a_o) - Y_0(a_o)\} \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{2}{a_o} \left[J_1(a_o) + Y_1(a_o) + i\{J_1(a_o) - Y_1(a_o)\} \right] \right] \\
 & - 2G.C_2^* \frac{u_o \cos \theta}{r_o} \left[\left[J_0(b_o) + Y_0(b_o) + i\{J_0(b_o) - Y_0(b_o)\} \right] + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{a_o^2}{b_o^2} - \frac{b_o}{2} - \frac{2}{b_o} \right) \left[J_1(b_o) + Y_1(b_o) + i\{J_1(b_o) - Y_1(b_o)\} \right] \right]
 \end{aligned}$$

(4.39)

Substituindo as deformações específicas em (4.35) obtém-se a tensão de cisalhamento $\tau_{r\theta}^*$.

$$\begin{aligned}
 \tau_{r\theta}^* = & 2G.C_1^* \frac{u_o \sin \theta}{r_o} \left[\left[J_0(a_o) + Y_0(a_o) + i\{J_0(a_o) - Y_0(a_o)\} \right] + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{a_o}{2} - \frac{2}{a_o} \right) \left[J_1(a_o) + Y_1(a_o) + i\{J_1(a_o) - Y_1(a_o)\} \right] \right] \\
 & - 2G.C_2^* \frac{u_o \sin \theta}{r_o} \left[\left[J_0(b_o) + Y_0(b_o) + i\{J_0(b_o) - Y_0(b_o)\} \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{b_o} \left[J_1(b_o) + Y_1(b_o) + i\{J_1(b_o) - Y_1(b_o)\} \right] \right]
 \end{aligned}$$

(4.40)

IV.3 - Cálculo da Força Resultante sobre o Cilindro

A reação do solo por unidade de comprimento do cilindro (F^*) é calculada integrando-se as tensões ao longo do perímetro da seção, conforme fórmula abaixo:

$$F^* = \int_0^{2\pi} (\sigma_r^* \cos \theta - \tau_{r\theta}^* \sin \theta) r_0 d\theta \quad (4.41)$$

Substituindo os valores de σ_r^* e $\tau_{r\theta}^*$ de (4.39) e (4.40), respectivamente, na equação (4.41) e integrando em relação a θ obtemos a expressão da força F^* .

Ao se integrar a expressão entre parênteses em (4.41) considerar os resultados das integrais imediatas.

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$$

Após feita a integração em θ na equação (4.41), procede-se a simplificação dos termos da expressão acima. Após completo trabalho de agrupamento e totalização dos termos semelhantes chega-se à seguinte expressão:

$$F^* = - \pi G a_0^2 T u_0 \quad (4.42)$$

onde:

$$T = - \frac{N}{D} \quad (4.43)$$

Não confundir este T com o período da vibração.

O numerador N, da relação (4.43) é

$$N = \left[a_0 \{Y_0(a_0) Y_1(b_0) - J_0(a_0) J_1(b_0)\} + b_0 \{Y_0(b_0) Y_1(a_0) - J_0(b_0) J_1(a_0)\} \right. \\ \left. - 4 \{Y_1(a_0) Y_1(b_0) - J_1(a_0) J_1(b_0)\} \right] \\ + i \left[a_0 \{Y_0(a_0) J_1(b_0) + J_0(a_0) Y_1(b_0)\} + b_0 \{Y_0(b_0) J_1(a_0) + J_0(b_0) Y_1(a_0)\} \right. \\ \left. - 4 \{Y_1(a_0) J_1(b_0) + J_1(a_0) Y_1(b_0)\} \right]$$

(4.44)

O denominador D, da relação (4.43) é:

$$D = \left[a_0 \{Y_0(a_0) Y_1(b_0) - J_0(a_0) J_1(b_0)\} + b_0 \{Y_0(b_0) Y_1(a_0) - J_0(b_0) J_1(a_0)\} \right. \\ \left. - a_0 b_0 \{Y_0(a_0) Y_0(b_0) - J_0(a_0) J_0(b_0)\} \right] \\ + i \left[a_0 \{Y_0(a_0) J_1(b_0) + J_0(a_0) Y_1(b_0)\} + b_0 \{Y_0(b_0) J_1(a_0) + J_0(b_0) Y_1(a_0)\} \right. \\ \left. - a_0 b_0 \{Y_0(a_0) J_0(b_0) + J_0(a_0) Y_0(b_0)\} \right]$$

(4.45)

De (4.42) obtemos a rigidez k_u à vibração horizontal

$$k_u = \frac{-F^*}{u_o} \quad (4.46)$$

Portanto:

$$\boxed{K_u = \pi G a_o^2 T} \quad (4.47)$$

Vamos agora simplificar a expressão de T . Para isso vamos introduzir as definições matemáticas das funções de Bessel modificadas.

Define-se a função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem n como

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = e^{-n\pi i/2} J_n(ix) \quad (4.48)$$

Se n é inteiro,

$$I_{-n}(x) = I_n(x) \quad (4.49)$$

Se n não for inteiro, $I_n(x)$ e $I_{-n}(x)$ são linearmente independentes.

A função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem n é definida como

$$K_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \left[\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi} \right] & \text{para } n \neq 0, 1, 2, 3, \dots \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \left[\frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin p\pi} \right] & \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.50)$$

$$(4.51)$$

Demonstra-se, para n inteiro que:

$$K_n(ix) = -i^{-n} \frac{\pi}{2} \left[Y_n(x) + i J_n(x) \right] \quad (4.52)$$

donde:

$$K_0(ix) = -\frac{\pi}{2} \left[Y_0(x) + i J_0(x) \right] \quad (4.53)$$

$$K_1(ix) = -\frac{\pi}{2} \left[J_1(x) - i Y_1(x) \right] \quad (4.54)$$

Empregando estas últimas relações (4.53) e (4.54) nas expressões (4.44) e (4.45), que fornecem os valores do numerador N e denominador D da relação (4.43), obtemos uma expressão sintética para T.

$$T = - \frac{4 K_1(ib_0) K_1(ia_0) + ia_0 K_1(ib_0) K_0(ia_0) + ib_0 K_0(ib_0) K_1(ia_0)}{ib_0 K_0(ib_0) K_1(ia_0) + ia_0 K_1(ib_0) K_0(ia_0) - a_0 b_0 K_0(ib_0) K_0(ia_0)} \quad (4.55)$$

Definindo a_0^* e b_0^* como

$$a_0^* = ia_0 \quad (4.56)$$

$$b_0^* = ib_0 \quad (4.57)$$

podemos reescrever (4.45)

$$T = - \frac{4 K_1(b_0^*) K_1(a_0^*) + a_0^* K_1(b_0^*) K_0(a_0^*) + b_0^* K_0(b_0^*) K_1(a_0^*)}{b_0^* K_0(b_0^*) K_1(a_0^*) + a_0^* K_1(b_0^*) K_0(a_0^*) + b_0^* a_0^* K_0(b_0^*) K_0(a_0^*)} \quad (4.58)$$

A rigidez K_u é dada pela fórmula (4.47), onde T é calculada pela relação (4.58)

$$K_u = \pi G a_o^2 T$$

Lembrando que.

$$a_o = \frac{\omega r_o}{V_s} \quad , \quad b_o = \frac{\omega r_o}{V_p}$$

onde V_s e V_p são funções do módulo de elasticidade E e do módulo de rigidez G , podemos generalizar a fórmula (4.48), para um meio visco-elástico linear, com amortecimento histerético, redefinindo a_o^* e b_o^* , em função das velocidades complexas da onda de cisalhamento e da onda dilatacional (V_s^* e V_p^*).

No caso de movimento de um meio elástico linear, sem amortecimento as velocidades de onda, V_s e V_p são dadas pelas fórmulas:

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4.59)$$

$$\text{onde } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$V_p = \sqrt{\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{E}{\rho}} \quad (4.60)$$

Considerando amortecimento histerético o módulo de rigidez, ao invés de G será G^* , dado pela fórmula.

$$G^* = G (1 + i D_s) \quad (4.61)$$

onde: $D_s = \operatorname{tg} \delta$ é o amortecimento da onda de cisalhamento
 δ é o ângulo de perda

O módulo de elasticidade E , por sua vez é substituído pelo módulo complexo E^* da pela fórmula

$$E^* = E(1 + iD_L) \quad (4.62)$$

De (4.50) tiramos a relação:

$$\rho V_P^2 = \frac{(1-\nu) E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda + 2G \quad (4.63)$$

Analogamente

$$\rho V_P^{*2} = \frac{(1-\nu) E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda^* + 2G^* = (\lambda + 2G) + i(\lambda' + 2G') \quad (4.64)$$

Substituindo (4.62) em (4.64)

$$\rho V_P^{*2} = \frac{(1-\nu) E(1+iD_L)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = (1 + iD_L) \rho V_P^2 \quad (4.65)$$

donde a velocidade complexa da onda longitudinal é:

$$\boxed{V_P^* = (\sqrt{1 + i D_L}) V_P} \quad (4.66)$$

Portanto:

$$\frac{V_P^*}{V_P} = \frac{\rho V_P^{*2}}{\rho V_P^2} = \frac{\lambda + 2G + i(\lambda' + 2G')}{\lambda + 2G} = (1 + i D_L)$$

donde:

$$D_L = \frac{\lambda' + 2G'}{\lambda + 2G} \quad (4.67)$$

A velocidade complexa da onda transversal \bar{e} :

$$V_S^* = \sqrt{\frac{G^*}{\rho}} = \sqrt{\frac{G(1+iD_S)}{\rho}}$$

Portanto:

$$\boxed{V_S^* = V_S \sqrt{(1 + i D_S)}} \quad (4.68)$$

Utilizando as velocidades de onda complexas a_o^* e b_o^* serão redefinidos como

$$a_o^* = i \frac{\omega r_o}{V_S^*} = \sqrt{\frac{a_o}{1+iD_S}} i \quad (4.69)$$

$$b_o^* = i \frac{\omega r_o}{v_p^*} = \frac{b_o}{\sqrt{1+iD_L}} i \quad (4.70)$$

Lembrando que, de acordo com (3.45), satisfaz as relações abaixo:

$$\alpha = \frac{v_s}{v_p} = \frac{b_o}{a_o} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$$

podemos substituir o valor de b_o , em função de a_o e ν , na equação (4.60)

$$b_o^* = \frac{a_o i}{\eta \sqrt{1+iD_L}}$$

onde

$$\eta = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}$$

Portanto no caso de amortecimento histerético devemos definir a_o^* e b_o^* conforme fórmulas abaixo:

$$a_o^* = \frac{a_o i}{\sqrt{1+iD_S}} \quad (4.71)$$

$$b_o^* = \frac{a_o i}{\eta \sqrt{1+iD_L}} \quad (4.72)$$

onde:

$$\eta = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad (4.73)$$

$$D_e = \frac{\lambda' + 2G}{\lambda + 2G} \quad (4.74)$$

Os valores de a_0^* e b_0^* dados respectivamente pelas fórmulas (4.71) e (4.72), substituídos em (4.58) fornecem o valor de T .

Substituindo o valor de T assim obtido, na equação 4.47 obtem-se a rigidez K_u , para deslocamentos horizontais.

Os valores das funções de Bessel modificadas de segunda espécie podem ser calculados pelas fórmulas abaixo:

$$\left\{ \begin{aligned} K_0(x) &= - \left[\ln \frac{x}{2} + \gamma \right] + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^{2s} \frac{1}{(s!)^2} \left[\sum_{r=1}^s \frac{1}{r} - \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) \right] \end{aligned} \right. \quad (4.75)$$

$$\left\{ \begin{aligned} K_1(x) &= \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^{2s-1} \frac{1}{(s!)^2} \left[\frac{1}{2} + s \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma - \sum_{r=1}^s \frac{1}{r} \right) \right] \end{aligned} \right. \quad (4.76)$$

onde γ é a constante de Euler.

$$\gamma = 0,5772156$$

V. EQUAÇÕES DINÂMICAS DO SISTEMA SOLO-ESTACA (PARA VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS)

V.1 - EQUAÇÃO DA LINHA ELÁSTICA

O sistema solo-estaca pode ser modelado como uma viga em apoio elástico, onde a viga representa a estaca e o apoio elástico é representado por uma infinidade de molas e amortecedores infinitesimais de modo a simular um apoio contínuo. A estaca é considerada perfeitamente aderente ao solo (efeitos de descolamento do solo próximo à superfície são considerados de forma aproximada). O módulo de elasticidade do solo é suposto constante dentro uma camada de mesmo material (na realidade varia com a profundidade, diminuindo quando a profundidade tende a zero).

As molas e os amortecedores são considerados lineares. Assim, admitindo que o movimento transversal de cada ponto da linha elástica seja do tipo harmônico simples de amplitude $u_0(z)$, a força devida a mola é proporcional a esta amplitude e tem a mesma fase, e a força de amortecimento é uma força cuja fase está adiantada de um quarto do período em relação ao deslocamento e é também proporcional à amplitude $u_0(z)$.

Para um deslocamento $u(z,t)$ dado pela equação abaixo,

$$u(z,t) = u_0(z) \cos \omega t \quad (5.1)$$

a reação (dR_s) do solo em um elemento (dz) da estaca é:

$$dR_s(z,t) = u_0(z) [K'_u \cos \omega t + K''_u \sin \omega t] dz \quad (5.2)$$

onde:

$u_0(z)$ - amplitude do movimento

K'_u - parcela da reação do solo por unidade de deslocamento, em fase com o mesmo

K''_u - parcela da reação do solo por unidade de deslocamento, fora de fase (adiantada 90° em relação ao deslocamento)

ω - frequência angular do movimento

t - tempo

K'_u e K''_u são funções da frequência (ω) e o deslocamento

Passando a equação (5.2) para a forma complexa

$$dR_s(z,t) = u_0(z)(K'_u + iK''_u)e^{i\omega t}dz \quad (5.3)$$

onde os deslocamentos na forma complexa de (5.1), são dados pela equação

$$u(z,t) = u_0(z)e^{i\omega t} \quad (5.4)$$

Conclui-se, então, que existe uma relação linear entre a reação (complexa) do solo, por unidade de comprimento da estaca, e o deslocamento (complexo) de modo que:

$$\frac{dR_s(z,t)}{dz} = R'_s(z,t) = K_u \cdot u(z,t) \quad (5.5)$$

onde:

$$K_u = K'_u + iK''_u \quad (5.6)$$

onde K_u é dado pela equação (4.47), do capítulo IV

$$K_u = \pi G a_0^2 T$$

V.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para se determinar o valor das constantes C_1, C_2, C_3 e C_4 , basta impor os deslocamentos e rotações nas extremidades da estaca de comprimento H .

Para a obtenção da matriz de rigidez da estaca, impõe-se o valor do deslocamento (ou rotação) igual à unidade, e os relativos aos demais graus de liberdade igual a zero. A seguir calculam-se as forças; estas constituirão a coluna da matriz de rigidez da estaca (ou trecho de estaca dentro de uma camada de solo).

Considerando os quatro graus de liberdade temos os seguintes casos:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \left. \begin{array}{ll} u(z=0) = 1 & \psi(z=0) = 0 \\ u(z=H) = 0 & \psi(z=H) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_{11}, C_{21}, C_{31}, C_{41} \\
 \text{b) } & \left. \begin{array}{ll} u(z=0) = 0 & \psi(z=0) = 1 \\ u(z=H) = 0 & \psi(z=H) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_{12}, C_{22}, C_{32}, C_{42} \\
 \text{c) } & \left. \begin{array}{ll} u(z=0) = 0 & \psi(z=0) = 0 \\ u(z=H) = 1 & \psi(z=H) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_{13}, C_{23}, C_{33}, C_{43} \\
 \text{d) } & \left. \begin{array}{ll} u(z=0) = 0 & \psi(z=0) = 0 \\ u(z=H) = 0 & \psi(z=H) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow C_{14}, C_{24}, C_{34}, C_{44}
 \end{aligned}$$

Estes casos estão representados na figura V.1.

Para estes deslocamentos unitários obtemos as seguintes expressões para as constantes C_1, C_2, C_3 e C_4 da equação (5.17).

onde o fator T é dado pela expressão (4.58).

A constante complexa K_u é a rigidez complexa, que engloba o amortecimento (parte imaginária) para efeito de aplicação da hipótese de Winkler na dedução da linha elástica.

A constante K_u também pode ser expressa em função dos adimensionais S_{u_1} e S_{u_2} e do módulo de rigidez (G).

$$K_u = G(S_{u_1} + iS_{u_2}) \quad (5.7)$$

Considerando-se o equilíbrio de um elemento (dz) da estaca, a equação diferencial da vibração amortecida é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} + G(S_{u_1} + iS_{u_2})u(z,t) \\ + N_{st} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + E_p I \frac{\partial^4 u(z,t)}{\partial z^4} = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

na qual:

μ - massa por unidade de comprimento da estaca

E_p - módulo de elasticidade da estaca

I - momento de inércia da seção da estaca

N_{st} - carga estática vertical sobre a estaca

Considerando a vibração harmônica lateral

$$u(z,t) = u(z)\exp(i\omega t)$$

a equação (5.8) pode ser escrita na forma

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + \beta_1 \frac{d^2 u}{dz^2} - \beta_2 u = 0 \quad (5.9)$$

onde

$$\beta_1 = \frac{N_{st}}{E_p I} \quad (5.10)$$

$$\beta_2 = \frac{(\mu\omega^2 - GS_u)}{E_p I} \quad (5.11)$$

$$S_u = S_{u_1} + iS_{u_2} \quad (5.12)$$

$$S_{u_1} = S_{u_1}(a_0, v) \quad (5.13)$$

$$S_{u_2} = S_{u_2}(a_0, v) \quad (5.14)$$

$$a_0 = \frac{\omega r_0}{v_s} \quad (5.15)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (5.16)$$

r_0 - raio da estaca

ρ - massa específica do solo

A solução geral da equação diferencial é:

$$u(z) = C_1 \cosh(r_1 \frac{z}{H}) + C_2 \sinh(r_1 \frac{z}{H}) + C_3 \cosh(r_2 \frac{z}{H}) + C_4 \sinh(r_2 \frac{z}{H}) \quad (5.17)$$

onde:

$$r_1 = (H/2) \sqrt{-\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + 4\beta_2}} \quad (5.18)$$

$$r_2 = (H/2) \sqrt{-\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 + 4\beta_2}} \quad (5.19)$$

H - comprimento de um trecho de estaca de seção constante, em solo homogêneo

C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno

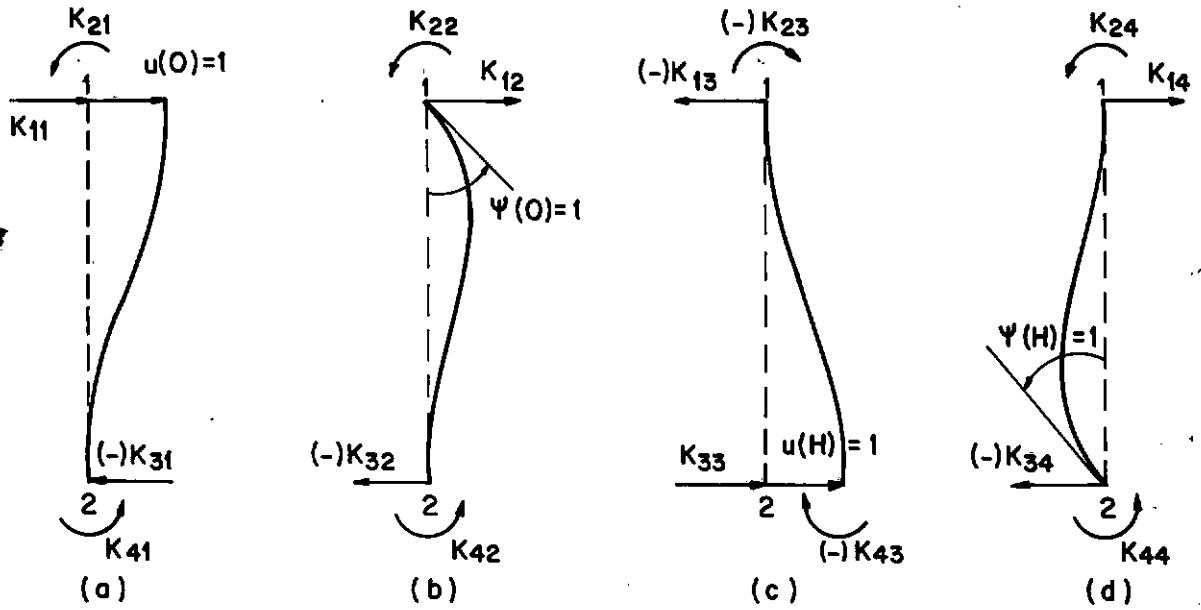


FIGURA V.1 - CONDIÇÕES DE CONTORNO DA LINHA ELÁSTICA

As condições de contorno dos casos (a), (b), (c) e (d) estão representadas na figura V.1 a,b,c e d, respectivamente e o valor das constantes C_1, C_2, C_3 e C_4 são, respectivamente, para cada caso:

$$a) u(0) = 1, \quad \psi(0) = 0$$

$$u(H) = 0, \quad \psi(H) = 0$$

$$C_1 = C_{11} = r_2[r_1(1 - \cosh r_1 \cosh r_2) + r_2 \sinh r_1 \sinh r_2]/D \quad (5.20)$$

$$C_2 = C_{21} = r_2[r_1 \sinh r_1 \cosh r_2 - r_2 \sinh r_2 \cosh r_1]/D \quad (5.21)$$

$$C_3 = C_{31} = r_1[r_2(1 - \cosh r_1 \cosh r_2) + r_1 \sinh r_1 \sinh r_2]/D \quad (5.22)$$

$$C_4 = C_{41} = r_1[r_2 \sinh r_2 \cosh r_1 - r_1 \sinh r_1 \cosh r_2]/D \quad (5.23)$$

onde:

$$D = 2r_1 r_2 (1 - \cosh r_1 \cosh r_2) + (r_1^2 + r_2^2) \sinh r_1 \sinh r_2 \quad (5.24)$$

$$b) u(0) = 0, \quad \psi(0) = 1$$

$$u(H) = 0, \quad \psi(H) = 0$$

$$C_1 = C_{12} = H[r_2 \sinh r_1 \cosh r_2 - r_1 \sinh r_2 \cosh r_1]/D \quad (5.25)$$

$$C_2 = C_{22} = H[r_2(1 - \cosh r_1 \cosh r_2) + r_1 \sinh r_1 \sinh r_2]/D \quad (5.26)$$

$$C_3 = C_{32} = H[r_1 \sinh r_2 \cosh r_1 - r_2 \sinh r_1 \cosh r_2]/D \quad (5.27)$$

$$C_4 = C_{42} = H[r_1(1 - \cosh r_1 \cosh r_2) + r_2 \sinh r_1 \sinh r_2]/D \quad (5.28)$$

$$c) \quad u(0) = 0, \quad \psi(0) = 0$$

$$u(H) = 1, \quad \psi(H) = 0$$

$$C_1 = C_{13} = r_1 r_2 (\cosh r_1 - \cosh r_2)/D \quad (5.29)$$

$$C_2 = C_{23} = r_2 (r_2 \sinh r_2 - r_1 \sinh r_1)/D \quad (5.30)$$

$$C_3 = C_{33} = r_1 r_2 (\cosh r_2 - \cosh r_1)/D \quad (5.31)$$

$$C_4 = C_{43} = r_1 (r_1 \sinh r_1 - r_2 \sinh r_2)/D \quad (5.32)$$

$$d) \quad u(0) = 0, \quad \psi(0) = 0$$

$$u(H) = 0, \quad \psi(H) = 1$$

$$C_1 = C_{14} = H(r_1 \sinh r_2 - r_2 \sinh r_1)/D \quad (5.33)$$

$$C_2 = C_{24} = H r_2 (\cosh r_1 - \cosh r_2)/D \quad (5.34)$$

$$C_3 = C_{34} = H(r_2 \sinh r_1 - r_1 \sinh r_2)/D \quad (5.35)$$

$$C_4 = C_{44} = H r_1 (\cosh r_2 - \cosh r_1)/D \quad (5.36)$$

V.3 - ESFORÇOS SOLICITANTES

O momento fletor $M(z)$ e a força cortante $Q(z)$ são obtidos derivando-se a equação da linha elástica

$$M(z) = EI \frac{d^2 u(z)}{dz^2} \quad (5.37)$$

$$Q(z) = EI \frac{d^3 u(z)}{dz^3} \quad (5.38)$$

Considerando que função da linha elástica $u(z)$ é uma combinação linear das funções correspondentes as linhas elásticas das configurações (a), (b), (c) e (d) da figura V.1, onde cada uma se refere a um deslocamento (ou rotação) unitário em cada grau de liberdade, pode-se calcular o momento $M(z)$, força cortante $Q(z)$, linha elástica $u(z)$ e rotação $\psi(z)$ para qualquer ponto ao longo da estaca em função dos deslocamentos nas suas extremidades.

Para os casos (a), (b), (c) e (d) as funções $u(z)$, da linha elástica são respectivamente $U_1(z)$, $U_2(z)$, $U_3(z)$ e $U_4(z)$. Portanto para a j -ésima configuração a função $u(z)$ é:

$$\begin{aligned} U_j(z) = & C_{1j} \cosh\left(\frac{r_1 z}{H}\right) + C_{2j} \sinh\left(\frac{r_1 z}{H}\right) \\ & + C_{3j} \cosh\left(\frac{r_2 z}{H}\right) + C_{4j} \sinh\left(\frac{r_2 z}{H}\right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

A rotação $\psi(z)$ correspondente é:

$$\begin{aligned} \psi_j(z) = & C_{1j} \frac{r_1}{H} \sinh\left(\frac{r_1 z}{H}\right) + C_{2j} \frac{r_1}{H} \cosh\left(\frac{r_1 z}{H}\right) \\ & + C_{3j} \frac{r_2}{H} \sinh\left(\frac{r_2 z}{H}\right) + C_{4j} \frac{r_2}{H} \cosh\left(\frac{r_2 z}{H}\right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

O momento fletor correspondente é:

$$\begin{aligned} M_j(z) = & \frac{EI}{H^2} [C_{1j} r_1^2 \cosh\left(\frac{r_1 z}{H}\right) + C_{2j} r_1^2 \sinh\left(\frac{r_1 z}{H}\right) \\ & + C_{3j} r_2^2 \cosh\left(\frac{r_2 z}{H}\right) + C_{4j} r_2^2 \sinh\left(\frac{r_2 z}{H}\right)] \end{aligned} \quad (5.41)$$

A força cortante correspondente é:

$$Q_j(z) = \frac{EI}{H^3} \left[C_{1j} r_1^3 \sinh\left(\frac{r_1 z}{H}\right) + C_{2j} r_1^3 \cosh\left(\frac{r_1 z}{H}\right) + C_{3j} r_2^3 \sinh\left(\frac{r_2 z}{H}\right) + C_{4j} r_2^3 \cosh\left(\frac{r_2 z}{H}\right) \right] \quad (5.42)$$

Portanto no caso geral, considerando u_1 e ψ_1 , o deslocamento e a rotação, respectivamente, na extremidade superior, e u_2 e ψ_2 , o deslocamento e rotação, respectivamente, na extremidade inferior da estaca, as funções $u(z)$, $\psi(z)$, $M(z)$, $Q(z)$ são:

Usando a seguinte notação:

$$\delta_1 = u_1$$

$$\delta_2 = \psi_1$$

$$\delta_3 = u_2$$

$$\delta_4 = \psi_2$$

pode-se escrever:

$$u(z) = \sum_{j=1}^4 \delta_j u_j(z) \quad (5.43)$$

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^4 \delta_j \psi_j(z) \quad (5.44)$$

$$M(z) = \sum_{j=1}^4 \delta_j M_j(z) \quad (5.45)$$

$$Q(z) = \sum_{j=1}^4 \delta_j Q_j(z) \quad (5.46)$$

Calculando-se os valores de $M(z)$ e $Q(z)$ nas extremidades, para cada configuração, obtêm-se os elementos da matriz de rigidez de dimensão 4×4 .

Fazendo $z=0$:

$$K_{1j} = Q_j(0) \quad (5.47)$$

$$K_{2j} = M_j(0) \quad (5.48)$$

Fazendo $z=H$:

$$K_{3j} = -Q_j(H) \quad (5.49)$$

$$K_{4j} = M_j(H) \quad (5.50)$$

Assim é obtida a matriz de rigidez (\underline{K}^e), para o caso de uma estaca em meio homogêneo:

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

V.4 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA SOLO-ESTACA

No caso de uma estaca atravessando várias camadas de solo (de propriedades diferentes), é necessário dividir a estaca em vários segmentos, de tal modo que cada um esteja inteiramente contido em camada de material homogêneo, além de possuir seção constante. Cada variação de material ou de seção da estaca corresponde a um novo segmento. A variação da força normal ao longo do comprimento da estaca, devido ao atrito lateral também pode ser considerada, sub-dividindo a estaca em trechos em que o esforço axial é aproximadamente constante. Desse modo o sistema solo-estaca fica dividido em vários elementos.

Para cada segmento da estaca calcula-se a matriz de rigi-

dez K^e , usando as fórmulas (5.47) a (5.50) (nessas fórmulas já estão incluídos os efeitos dinâmicos do solo circundante). Usando a matriz de rigidez do elemento monta-se a matriz de rigidez global (da estrutura), $[K_u]$, para a estaca enterrada composta de elementos separados pelas interfaces entre camadas (fig. V.1).

Impondo-se o deslocamento horizontal unitário ($u_1=1$) e rotação nula ($\psi_1=0$), no topo da estaca, e resolvendo-se o sistema linear nas incógnitas restantes ($u_2, \psi_2, \dots, u_{n+1}, \psi_{n+1}$), uma vez de posse de todos os deslocamentos dos nós da estrutura pode-se calcular a força (K_{uu}) e o momento ($K_{\psi u}$) na cabeça da estaca. Analogamente impondo deslocamento horizontal nulo ($u_1=0$) e rotação unitária ($\psi_1=1$) obtêm-se a força ($K_{u\psi}$) e o momento ($K_{\psi\psi}$) no topo. Desse modo fica calculada a matriz de rigidez condensada.

$$K_u = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1,2n+2} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2,2n+2} \\ \vdots & & & \\ K_{2n+2,1} & K_{2n+2,2} & \dots & K_{2n+2,2n+2} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Para deslocamento (\bar{u}_1) e rotação ($\bar{\psi}_1$), impostos no topo monta-se o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & \dots & K_{3,2n+1} & K_{3,2n+2} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & \dots & K_{4,2n+1} & K_{4,2n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & K_{2n+1,3} & K_{2n+1,4} & \dots & K_{2n+1,2n+1} & K_{2n+1,2n+2} \\ 0 & 0 & K_{2n+2,3} & K_{2n+2,4} & \dots & K_{2n+2,2n+1} & K_{2n+2,2n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ u_{n+1} \\ \psi_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{\psi}_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ \vdots \\ F_{n+1} \\ M_{n+1} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

no qual,

$$F_i = -K_{2i-1,1} \bar{u}_1 - K_{2i-1,2} \bar{\psi}_1 \quad (5.54)$$

$$M_i = -K_{2i,1} \bar{u}_1 - K_{2i,2} \bar{\psi}_1 \quad (5.55)$$

para $i=2n+1$

Com os valores dos deslocamentos (u_i) e rotações (ψ_i) calcula-se a matriz condensada (\bar{K})

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\psi} \\ K_{\psi u} & K_{\psi\psi} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Os elementos dessa matriz são as impedâncias da estaca, que são função da frequência (funções de impedância)

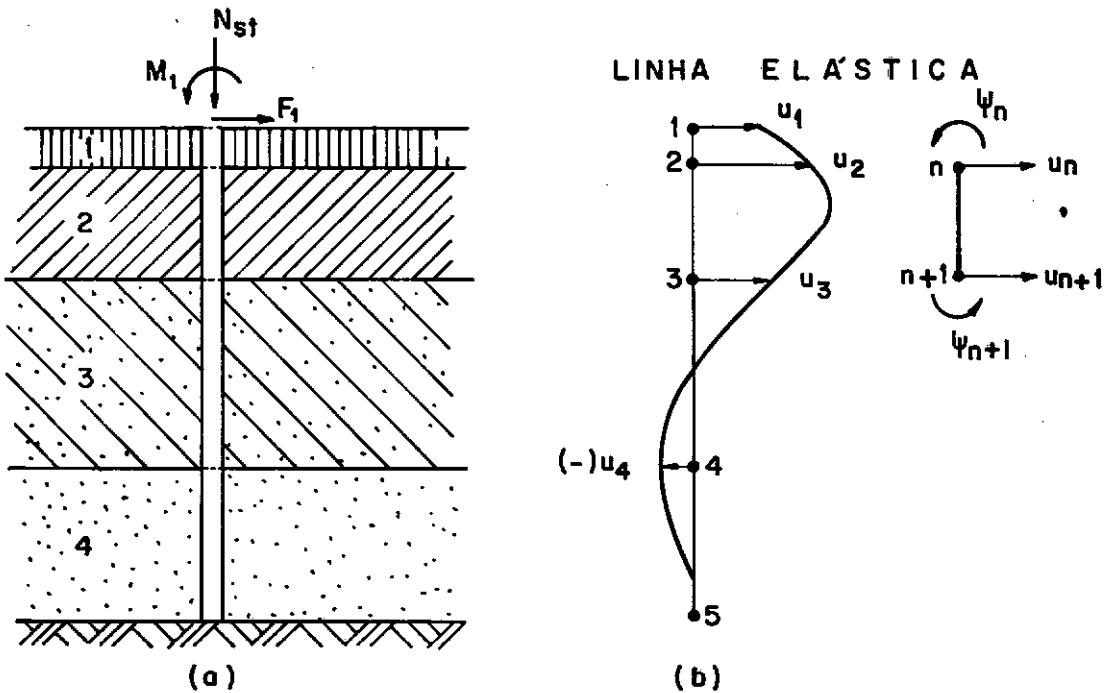


FIGURA V.2 - DESLOCAMENTOS DOS NÓS DOS ELEMENTOS DE ESTACA

A matriz de rigidez condensada (\underline{k}) satisfaz a relação abaixo:

$$\begin{array}{cc}
 1 & 2 \\
 \left[\begin{array}{c} K_{uu} \\ K_{\psi u} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} K_{u\psi} \\ K_{\psi\psi} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{cc}
 1 & 2 \\
 \left[\begin{array}{c} u_1=1 \\ \psi_1=0 \\ u_2 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{n+1} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} u_1=0 \\ \psi_1=1 \\ u_2 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{n+1} \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (5.57)$$

VI. RESULTADOS

Para se avaliar a sensibilidade do modelo adotado (solução de Novak) foi desenvolvido um programa de computador utilizando a teoria descrita nos capítulos anteriores e foram realizadas várias corridas experimentais variando a frequência, para obtenção das impedâncias K_{uu} , $K_{\psi\psi}$, $K_{u\psi}$. Para as mesmas frequências e com o mesmo solo e a mesma estaca foram feitos testes usando o sistema ADEP, para análise dinâmica, que utiliza o modelo de Matlock e Reese, adotado pelo A.P.I.

O modelo de Matlock e Reese emprega as curvas P-y, onde as constantes de Winkler são funções da coesão e ângulo de atrito do solo e o amortecimento é considerado como uma porcentagem do amortecimento crítico. Neste modelo o amortecimento histerético do material é o dobro do estrutural. Foi admitido o amortecimento histerético $D_s = 0,14$, portanto 7% do crítico.

No modelo de Novak a reação do solo é calculada pela Teoria da Elasticidade, em função do módulo de elasticidade, razão de Poisson, densidade do solo e amortecimento histerético. Para se comparar os dois modelos é necessário calcular os módulos de elasticidade a partir das curvas P-y para o caso estático (ou para uma frequência muito baixa no caso dinâmico) empregando a Teoria da Elasticidade para as condições de contorno do problema, admitindo o valor para a razão de Poisson em função da classificação do solo. A incerteza da razão de Poisson afeta, obviamente, a exatidão do módulo assim calculado, porém o erro acarretado é pequeno comparado com outros fatores.

No exemplo de teste para comparação dos dois modelos foi admitida uma estaca de diâmetro 30 pol., espessura 1,75 pol e comprimento 50m, em areia média de peso aparente submerso $0,8 \text{ tf/m}^3$ e ângulo de atrito 30 graus. Para considerar a variação do módulo de elasticidade com a profundidade no programa desenvolvido segundo a teoria de Novak, a camada de areia (no caso camada única) foi subdividida em 8 subcamadas, de espessuras 1, 2, 3, 6, 8, 10, 10 e 10m., respectivamente, a partir da superfície do solo. Os módulos de elasticidade foram ajustados iterativamente através das curvas P-y, referentes a profundidade do plano horizontal médio de cada camada. Estas curvas P-y fazem parte da saída impressa do sistema ADEP. Utilizou-se pares (P, y) correspondentes a faixa linear. Para a areia, a razão de Poisson foi admitida igual a 0,3. A frequência usada para o ajuste foi de 1 Hz, considerada baixa.

TABELA VI.1

ESPESS. DA CAMADA (m)	PROF. MÉDIA (m)	P (tf/m^2)	y (m)	E (kgf/cm^2)
1,0	0,5	0,39622	0,00048	73
2,0	2,0	4,13285	0,00124	261
3,0	4,5	5,24509	0,00070	900
6,0	9,0	32,79619	0,00219	1940
8,0	16,0	74,84184	0,00282	3650
10,0	25,0	116,94037	0,00282	5960
10,0	35,0	163,71652	0,00282	8650
10,0	45,0	210,49267	0,00282	11330

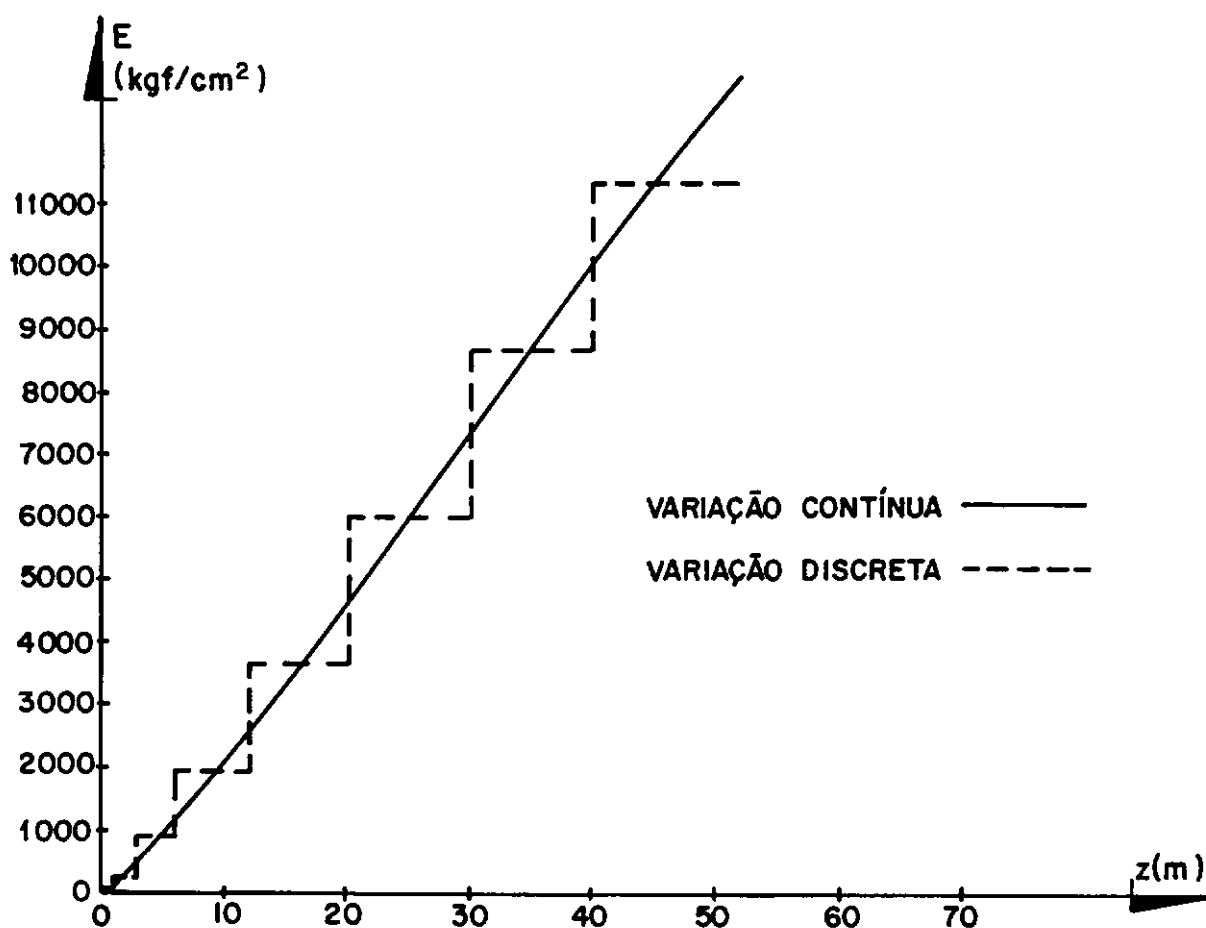


FIGURA VI.1_VARIAÇÃO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE COM A PROFUNDIDADE (z)

O processo usado para o ajuste dos módulos de elasticidade em cada camada (subcamada) foi o de comparação do coeficiente angular do trecho linear do diagrama P-y com o módulo da função de impedância $K_u = G(S_{u_1} + iS_{u_2})$, para o estado plano de deformações⁽⁹⁾; igualando-se a relação força-deslocamento da curva P-y (na faixa linear) com a relação força-deslocamento da teoria analítica conhecidos S_{u_1} e S_{u_2} , calcula-se o módulo $\sqrt{S_{u_1}^2 + S_{u_2}^2}$

$$G = \frac{K'_u}{|S_{u_1} + iS_{u_2}|} = \frac{K'_u}{\sqrt{S_{u_1}^2 + S_{u_2}^2}} \quad (6.1)$$

onde K'_u é a relação entre a força P e o deslocamento y da curva P-y.

Mas S_{u_1} e S_{u_2} são funções da frequência adimensional a_0 , da razão de Poisson ν e do amortecimento interno D, do solo.

$$S_u = S_{u_1} + iS_{u_2} \quad (6.2)$$

$$S_{u_1} = S_{u_1}(a_0, \nu, D) \quad (6.3)$$

$$S_{u_2} = S_{u_2}(a_0, \nu, D) \quad (6.4)$$

onde

$$a_0 = \frac{r_0 \omega}{V_s}$$

r_0 = raio da estaca

V_s = velocidade da onda de cisalhamento

ω = frequência angular

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.5)$$

G = módulo de rigidez do solo

ρ = massa específica do solo

Os parâmetros S_{u_1} e S_{u_2} são adimensionais sendo que S_{u_2} para baixas frequências é pequeno comparado com S_{u_1} e além disso o valor de S_{u_1} não é muito sensível com a variação da frequência. Portanto atribuindo um valor inicial em torno de 4, conforme gráfico da figura 5 da referência bibliográfica nº9, e atribuindo valor inicial nulo a S_{u_2} , dividindo-se K'_u pelo valor inicial de S_{u_1} já dá um valor aproximado de G . O módulo de elasticidade é obtido multiplicando-se G por $2(1+\nu)$.

Com o novo valor estimado de G , calcula-se a velocidade de onda V_s e, conseqüentemente a nova frequência adimensional a_0 , obtendo-se novos valores de S_{u_1} e S_{u_2} .

O programa possui uma subrotina especial para calcular a impedância $K_u = G(S_{u_1} + S_{u_2})$ em função do diâmetro da estaca, módulo de elasticidade, razão de Poisson, amortecimentos hysteréticos D_s e D_L e massa específica. Com o novo valor do módulo de K_u calcula-se o novo valor de G dividindo-se a constante K'_u do diagrama P-y pelo novo valor do módulo de S_{u_1} . Os módulos de elasticidade de cada camada convergiram em 4 iterações (figura VI.1).

Foram feitas várias corridas do programa ADEP e do programa desenvolvido segundo o modelo de Novak, variando-se a frequência e condições de contorno no topo da estaca. O programa experimental usando a teoria exposta anteriormente fornece, a partir do deslocamento horizontal e rotação impostos na cabeça da estaca, a força e o momento aplicados naquele ponto. Assim a matriz de rigidez condensada (\underline{K}) foi calculada rodando o programa para deslocamento unitário e rotação nula e, em seguida para deslocamento nulo e rotação unitária, para cada frequência, obtendo-se K_{uu} , $K_{u\psi}$ e $K_{\psi\psi}$. No programa de análise dinâmica do sistema ADEP, por outro lado, o carregamento variável no tempo tem que ser dado por forças e momentos aplicados à estrutura (no caso força horizontal e momento no plano vertical aplicados na cabeça da estaca); não admite deslocamentos variáveis no tempo impostos como condição de contorno. Por este motivo nas corridas do sistema ADEP, foram considerados como carregamentos isolados uma força cíclica horizontal e um momento cíclico no plano vertical, dando como resultado os deslocamentos e rotações respectivos. Foi adotada para cada frequência uma força horizontal de 100 tf e um momento de 100 tf-m aplicados separadamente (uma corrida do ADEP para a força e outra para o momento). Desse modo é obtida a matriz de flexibilidade (complexa), que invertida dará a matriz de rigidez (complexa). Os deslocamentos e rotações resultantes do ADEP, dados pelo módulo e fase podem ser rapidamente convertidos para a forma complexa, bastando multiplicar os módulos por co-seno e seno dos ângulos de fases, dando as partes reais e imaginárias, respectivamente. A matriz de rigidez dinâmica (\underline{K}) em função da matriz de flexibilidade (\underline{F}) é:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\psi} \\ K_{\psi u} & K_{\psi\psi} \end{bmatrix} = \tilde{F}^{-1} \quad (6.6)$$

onde

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$K_{uu} = f_{22} / (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) \quad (6.8)$$

$$K_{u\psi} = -f_{21} / (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) \quad (6.9)$$

$$K_{\psi u} = -f_{12} / (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) \quad (6.10)$$

$$K_{\psi\psi} = f_{11} / (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) \quad (6.11)$$

As frequências ensaiadas foram de 1, 5, 10, 16, 25 e 40 Hz e a carga vertical aplicada foi considerada nula para não introduzir outros efeitos como acoplamento entre graus de liberdade que dificultariam a interpretação do comportamento físico do sistema solo-estaca. Para cargas axiais não muito elevadas em relação à esbeltez da estaca, estes efeitos de acoplamento não são de grande importância para o estudo de desempenho do sistema no domínio da frequência. O efeito da força normal na estaca é o de produzir uma assimetria (em geral pequena, dependendo da esbeltez e nível de solicitação axial da estaca) na matriz de rigidez \underline{K} , que teria o termo $K_{u\psi}$ diferente de $K_{\psi u}$. Este efeito de acoplamento também ocorre estaticamente, não apresentando, portanto, grande interesse na comparação de modelos estático e dinâmico das reações do solo, e entre diferentes modelos. As características mais importantes do fenômeno são os efeitos dinâmicos do solo sobre um contorno, da reação transversal da

estaca vibrando num plano horizontal. O objetivo maior da comparação entre modelos é verificar a sensibilidade dos mesmos à variação da frequência, considerando as variáveis que desempenham papel preponderante; por este motivo não foi considerado o efeito da força normal.

Dos testes realizados com o ADEP, chegou-se aos seguintes valores dos termos da matriz de flexibilidade, conforme tabela abaixo:

TABELA VI.2 - ELEMENTOS f_{ij} DA MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

FREQ. (Hz)	f_{11} (10^{-4} m/tf)	f_{12}, f_{21} (10^{-5} tf $^{-1}$)	f_{22} (10^{-5} tfxm)
1	2,52857 -0,01134 i	6,92645 -0,02552 i	3,10469 -0,00647 i
5	2,59580 -0,05993 i	7,07558 -0,13647 i	3,13922 -0,03354 i
10	2,83258 -0,14511 i	7,60011 -0,32841 i	3,25973 -0,07950 i
16	3,50790 -0,37034 i	9,08909 -0,82651 i	3,59769 -0,19368 i
25	7,70415 -3,7005 i	18,259 -0,80727 i	5,62788 -1,7791 i
40	-1,9650 -0,5204 i	-2,4467 -1,2769	1,30531 -0,36911 i

Invertendo-se as matrizes de flexibilidade F calculam-se os valores das impedâncias K_{uu} , $K_{u\psi}$ e $K_{\psi\psi}$.

A tabela VI.3 apresenta os valores das impedâncias resultantes, aplicando-se o modelo do sistema ADEP e a tabela VI.4 usando-se o modelo de Novak.

TABELA VI.3 - IMPEDÂNCIAS PELO ADEP

FREQ. (Hz)	K_{uu} (10^3 tf/m)	$K_{u\psi}, K_{\psi u}$ (10^4 tf)	$K_{\psi\psi}$ (10^4 tfxm)
1	10,1696 +0,03283 i	2,26883 +0,00369 i	8,28263 +0,00686 i
5	9,98631 +0,15417 i	2,25135 +0,01539 i	8,26029 +0,02509 i
10	9,41269 +0,31198 i	2,19696 +0,03149 i	8,19188 +0,05188 i
16	8,19948 +0,51414 i	2,08042 +0,05352 i	8,04291 +0,09025 i
25	5,21766 +0,86126 i	1,78612 +0,09563 i	7,65567 +0,16836 i
40	-3,75542 +1,83707 i	0,81218 +0,25269 i	6,24507 +0,49781 i

TABELA VI.4 - IMPEDÂNCIAS PELA TEORIA DE NOVAK

FREQ. (Hz)	K_{uu} (10^3 tf/m)	$K_{u\psi}, K_{\psi u}$ (10^4 tf)	$K_{\psi\psi}$ (10^4 tfxm)
1	9,65371 +3,03587 i	2,24317 +0,43730 i	8,38751 +0,78752 i
5	11,7064 +5,73090 i	2,57523 +0,74027 i	9,01802 +1,21326 i
10	12,5034 +8,37710 i	2,74572 +1,01989 i	9,36492 +1,58558 i
16	12,5937 +11,3972 i	2,85392 +1,32864 i	9,62787 +1,98267 i
25	11,7226 +15,9678 i	2,92808 +1,78481 i	9,90290 +2,54994 i
40	8,4951 +23,9793 i	2,94174 +2,56639 i	10,2515 +3,47716 i

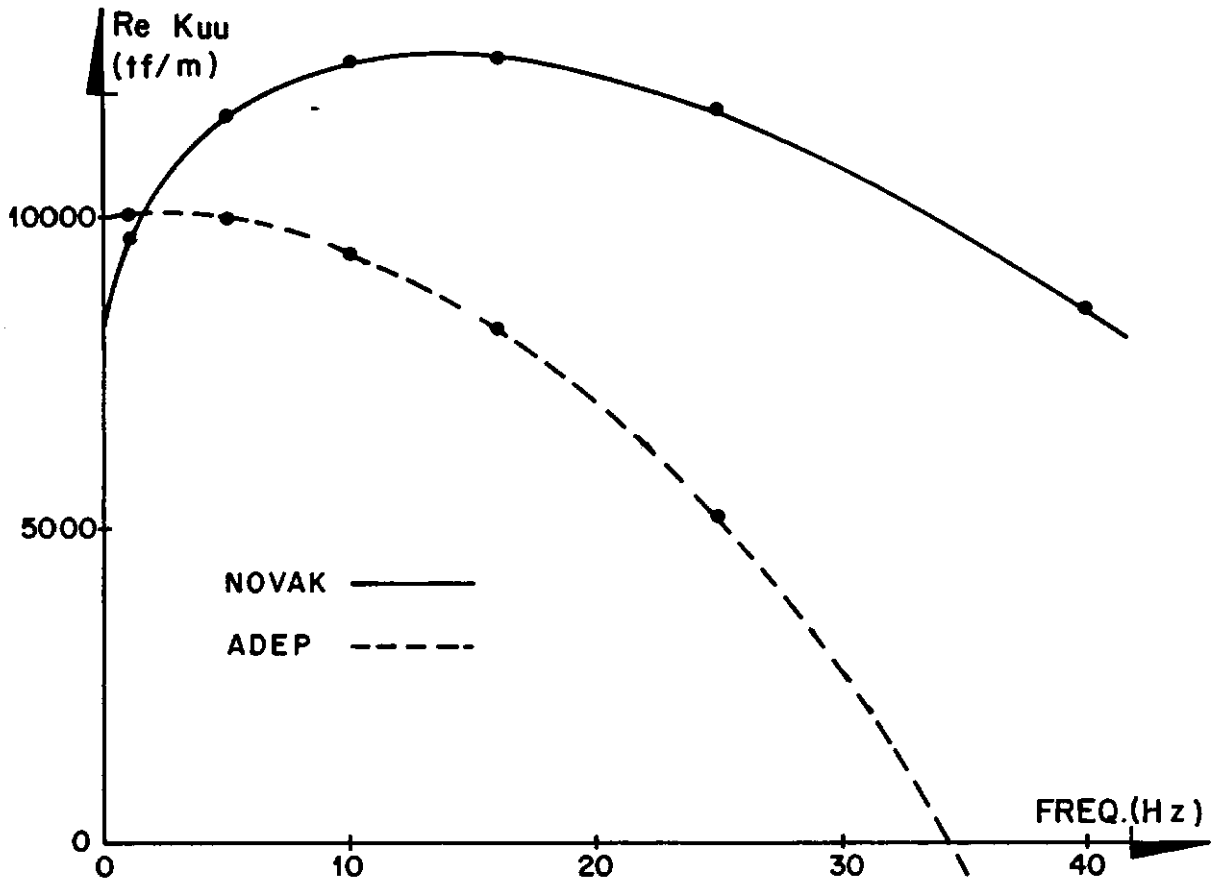


FIGURA VI.2(a)_PARTE REAL DA IMPEDÂNCIA K_{uu} , DA ESTACA

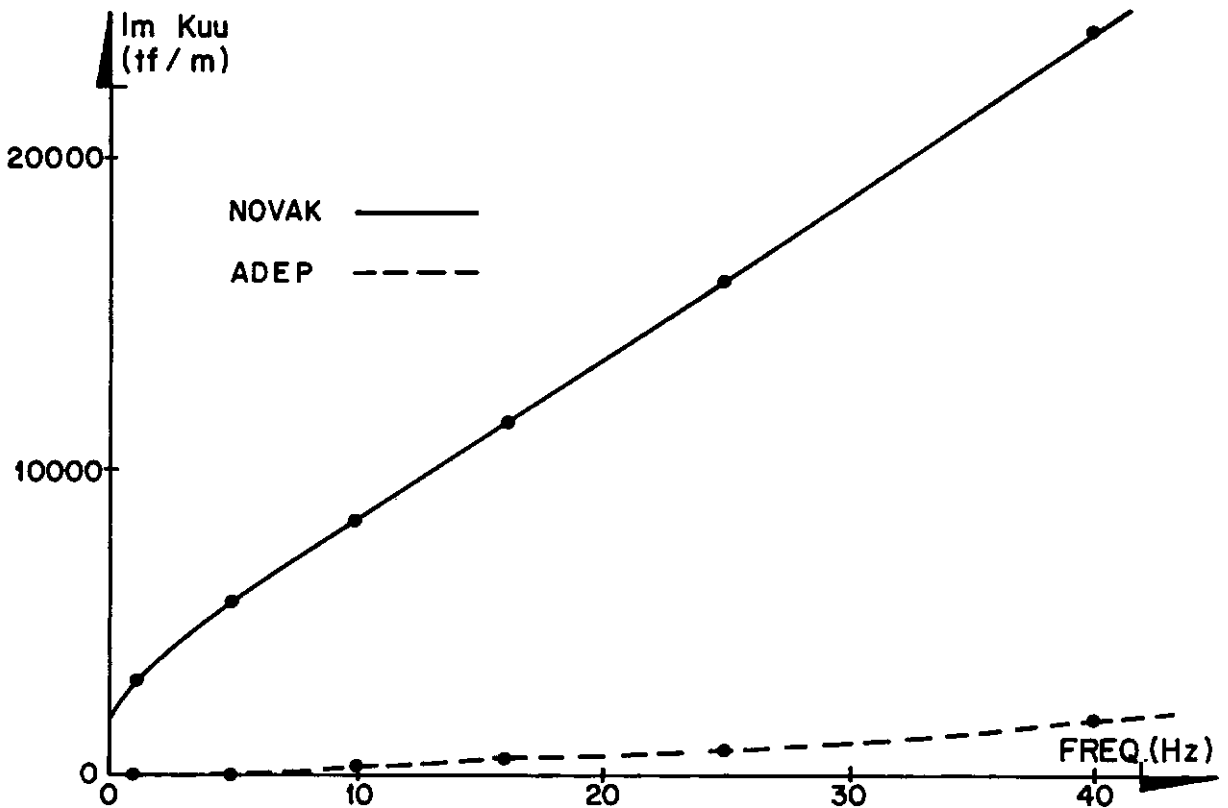


FIGURA VI.2(b)_PARTE IMAGINÁRIA DA IMPEDÂNCIA K_{uu} , DA ESTACA

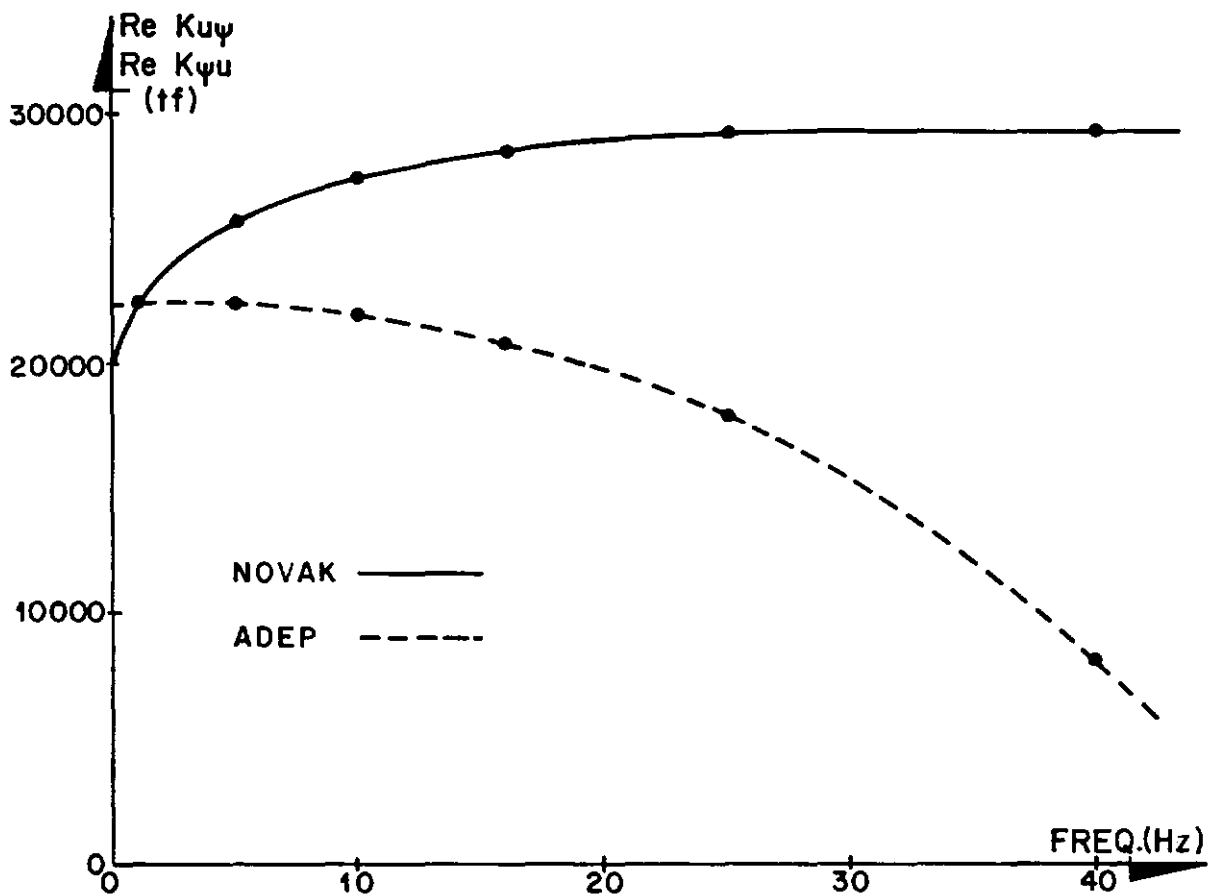


FIG. VI.3(a) - PARTE REAL DAS IMPEDÂNCIAS $K_{u\psi}$ e $K_{\psi u}$, DA ESTACA

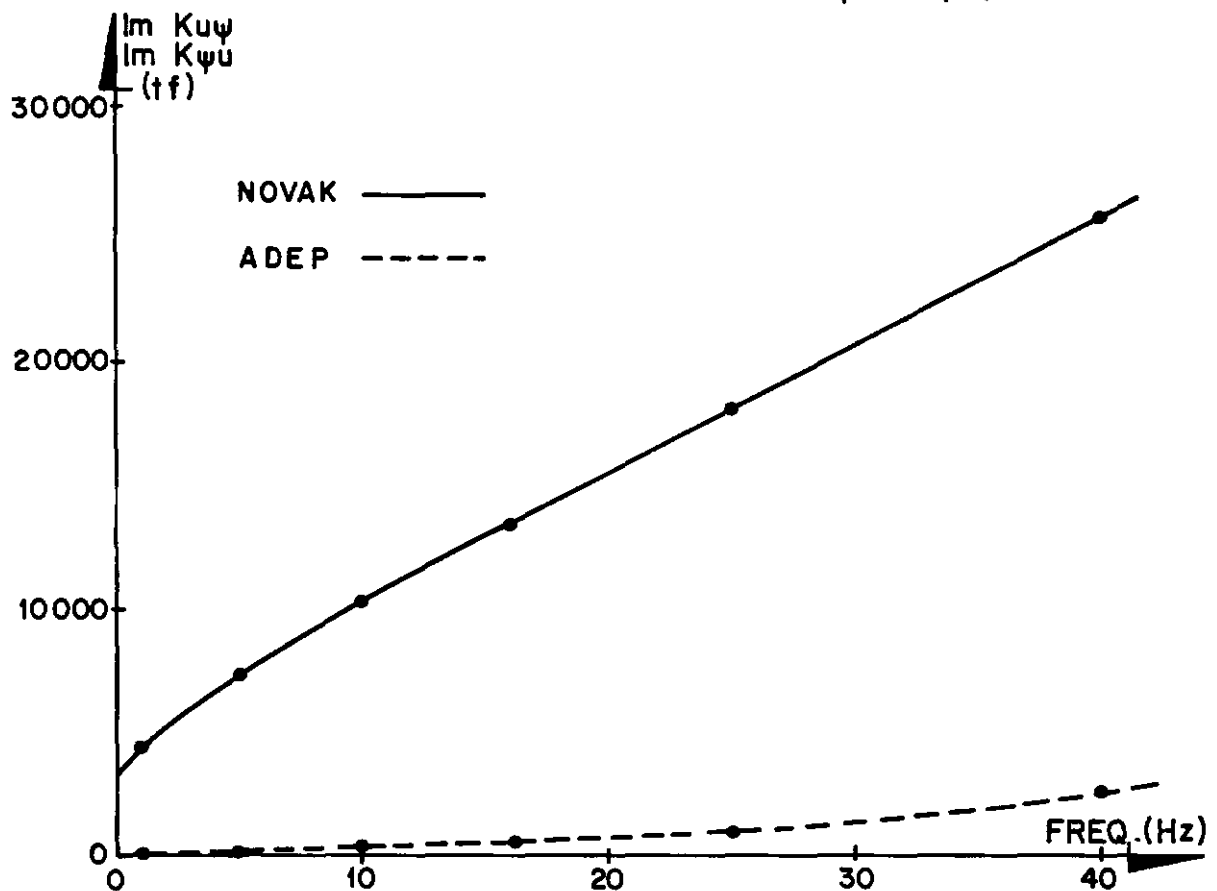


FIG. VI.3(b) - PARTE IMAGINÁRIA DAS IMPEDÂNCIAS $K_{u\psi}$ e $K_{\psi u}$, DA ESTACA

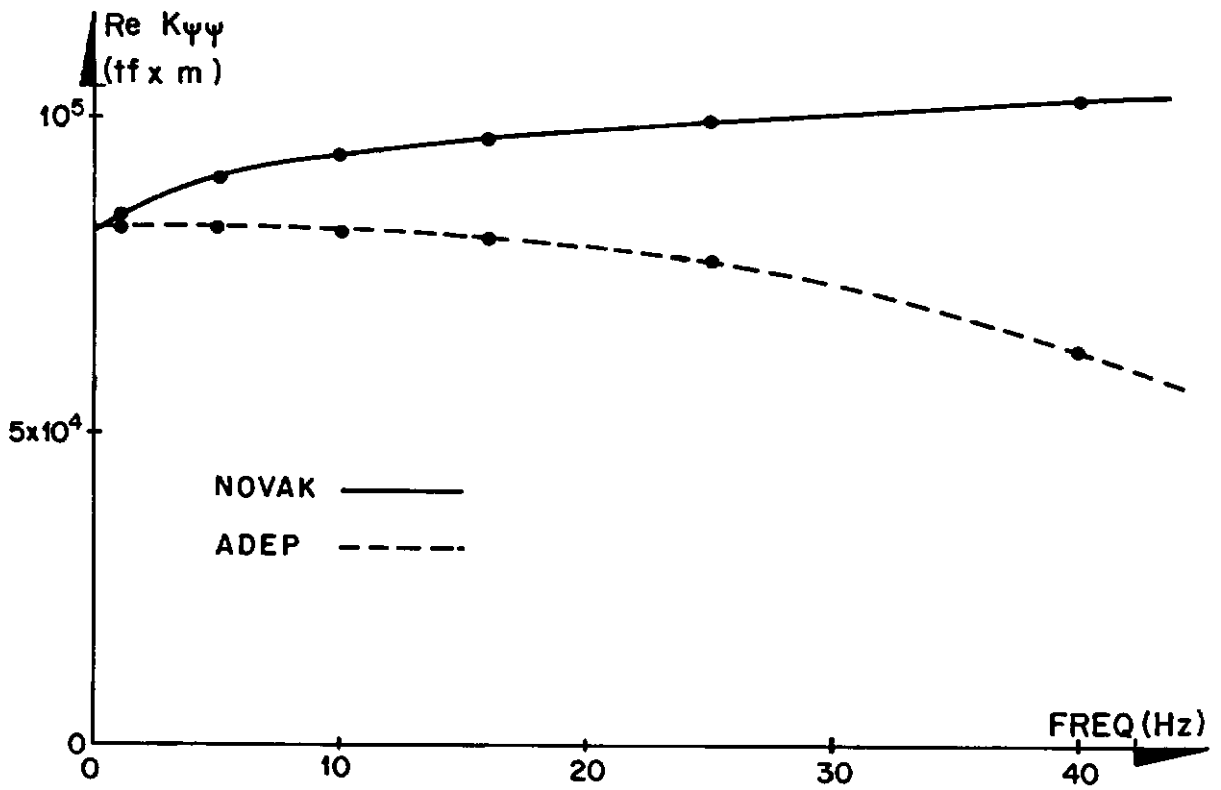


FIGURA VI.4(a)_PARTE REAL DA IMPEDÂNCIA $K_{\psi\psi}$, DA ESTACA

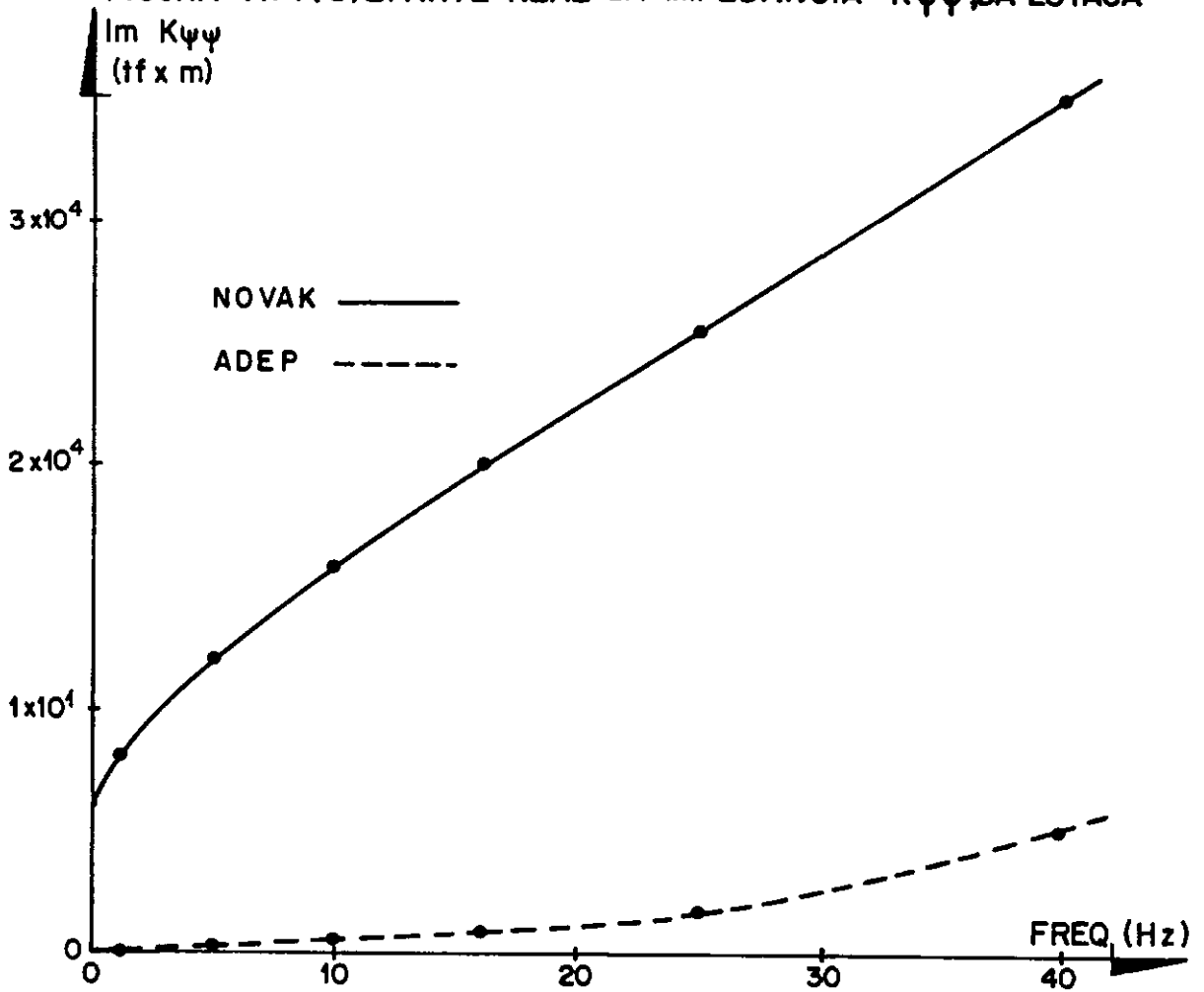


FIGURA VI.4(b)_PARTE IMAGINÁRIA DA IMPEDÂNCIA $K_{\psi\psi}$, DA ESTACA

VII. CONCLUSÕES

VII.1 - Principais Diferenças entre os Modelos de Novak e Matlock

A principal diferença observada comparando os gráficos de impedância das figuras VI.2 a VI.4, é que a resultante do amortecimento, representada pela parte imaginária das impedâncias K_{uu} , $K_{u\psi}$, $K_{\psi u}$ ou $K_{\psi\psi}$, é no modelo de Novak, muito superior ao valor calculado pelo ADEP. A diferença pode ser explicada pela presença do amortecimento geométrico, além do amortecimento histerético do solo. No modelo de Matlock é considerado apenas o amortecimento histerético. O amortecimento geométrico, como foi visto, é causado pela irradiação de ondas elásticas para o semi-espço infinito representando o solo. Estas curvas representativas das funções de impedância no modelo analítico teórico estão baseadas na hipótese de linearidade nas relações entre tensões e deformações, considerando que não ocorre a separação entre a estaca e solo. Na realidade o descolamento da estaca do solo ocorre na maioria das vezes, até com pequenos deslocamentos. Este fenômeno é bem característico dos solos não-coesivos (areias, silte, etc) onde o menor deslocamento da fundação já é suficiente para provocar a separação entre estaca e o solo. Quando isto ocorre, o amortecimento geométrico sofre uma queda, pois a interface solo-estaca perde grande parte da sua capacidade de transmitir ondas elásticas para o solo adjacente. De modo semelhante a rigidez, (representada pela parte real da impedância), também é afetada. Quando ocorre o desacoplamento da estaca ao solo, tanto a ligação do tipo elástico (molas fictícias equivalentes), como a do tipo viscoso (amortecedores fictícios equivalentes) sofrem colapso simultaneamente. Portanto

no caso real as curvas da rigidez (parte real) e do amortecimento (parte imaginária) tendem a se deslocar para baixo conforme a porcentagem de desacoplamento.

Nos gráficos VI.2(a), VI.3(a), VI.4(a), as curvas, que apresentam a variação da rigidez (mola equivalente) em função da frequência, segundo teoria de Novak, mostram que as rigidezes crescem com a frequência na faixa de frequências mais baixas. No caso da rigidez $\text{Re } K_{uu}$ (parte real de K_{uu}), observa-se pela figura VI.2(a), que a rigidez atinge o valor máximo de 12700 tf/m em torno de 14 Hz e a partir daí decai atingindo 8500 tf/m à 40Hz. Na frequência de 1 Hz, o valor de $\text{Re } K_{uu}$ é 9650 tf/m, dando uma variação de cerca de 30% na faixa de 1 a 40 Hz.

O amortecimento, representado nos gráficos VI.2(b), VI.3(b) e VI.4(b), no modelo de Novak, exibe uma variação com a frequência sensivelmente linear a partir de 3 Hz, no caso da impedância K_{uu} e a partir de 7 Hz, no caso de $K_{u\psi}$, $K_{\psi u}$ e $K_{\psi\psi}$. À medida que a frequência aumenta, o amortecimento torna-se cada vez mais importante. À 40 Hz, o amortecimento de $\text{Im } K_{uu}$ é de 24000 tf/m enquanto que a rigidez $\text{Re } K_{uu}$ é de 8500 tf/m, aproximadamente, o que dá uma relação de 2,82, dando um ângulo de fase de cerca de 70° . Na frequência de 1 Hz o amortecimento é de cerca de 3000 tf. Portanto houve uma variação dramática do amortecimento, mostrando a conveniência do tratamento no domínio da frequência preferivelmente à análise modal. Nos sistemas de elevado grau de amortecimento, a defasagem entre a força e o deslocamento é de grande importância, e no caso de um sisteme

ma solo-estaca-estrutura, em alta frequência, é preciso considerar devidamente as diferenças entre o elevado amortecimento da fundação e o baixo amortecimento da parte estrutural produzido pelo fluido circundante, como por exemplo numa plataforma "off-shore" submetida a um sismo. Pelos gráficos das impedâncias K_{uu} , $K_{u\psi}$, $K_{\psi u}$ e $K_{\psi\psi}$ pode-se observar que a parte imaginária destas (amortecimento) cresce linearmente com a frequência. No gráfico de K_{uu} a parte real (rigidez) cresce até certa frequência de crescendo em seguida, conforme figura VI.2(a). Nos gráficos das impedâncias $K_{u\psi}$ e $K_{\psi u}$, pode-se notar um crescimento da rigidez, com a frequência, com uma tendência a atingir um valor máximo na região próxima de 40 Hz, no caso de $K_{u\psi}$ e $K_{\psi u}$; no caso de $K_{\psi\psi}$ a figura VI.4(a) sugere a tendência de um máximo fora do campo do gráfico. Existe, portanto, uma semelhança de comportamento entre as impedâncias K_{uu} , $K_{u\psi}$, $K_{\psi u}$, $K_{\psi\psi}$ pelo menos para o "range" de frequências ensaiado. Com o crescimento linear do amortecimento e decréscimo da rigidez com o aumento da frequência, pode-se inferir que o efeito dinâmico do solo, equivalente a combinação de molas e amortecedores, tende para a reação de amortecedores puros (parcela de rigidez desprezível), quando a frequência tende para infinito.

No modelo do ADEP a rigidez apresenta uma queda aproximadamente segundo uma parábola do segundo grau. Este fato pode ser explicado pela atuação das forças de inércia que são proporcionais ao quadrado da frequência e têm direção contrária às das reações elásticas do solo (molas de Winkler). No modelo de Novak há um aumento inicial da rigidez em função da frequência, para frequências baixas. Isto pode ser explicado pela con

tribuição da inércia do solo, como uma massa adicional. Para baixas frequências (grandes comprimentos de onda) a variação de fase com a distância da fonte de irradiação é bastante suave, de modo que um grande volume de solo se move quase que em sincronia com o movimento da estaca contribuindo para a inércia. À medida que a frequência aumenta, o comprimento de onda diminui, crescendo conseqüentemente a massa adicional, reduzindo os efeitos de força de inércia que tem sentido contrário à reação elástica estática do solo; por isso a rigidez equivalente aumenta até um máximo. Depois a inércia da estaca começa a ter uma atuação mais importante fazendo com que caia a rigidez.

Deve-se ressaltar que o sistema ADEP permite o refinamento do modelo utilizado, por exemplo: poderia-se considerar o efeito do descolamento, degradação do ciclo histerético e amortecedores discretos para simular o efeito do amortecimento geométrico. Entretanto tais simulações devem ser efetuadas no domínio do tempo através de análises não lineares, que fogem do escopo do presente trabalho.

VII.2 - Discussão do Modelo Adotado

A teoria acima exposta, apesar de aparentemente muito rigorosa para pequenas deformações, resolvendo analiticamente problema de contorno da Teoria da Elasticidade apresenta várias simplificações no equacionamento tridimensional do problema, tanto nas condições de contorno ao nível da superfície livre do solo como na interface solo-estaca, onde existem tensões de cis-

lhamento na direção de seu eixo longitudinal, além da aderência não perfeita (descolamento). A partir de certo nível de deformações entram em cena os efeitos da não-linearidade física do material que é problema ainda não completamente solucionado no atual estado da arte⁽⁴⁾.

O efeito de separação da estaca quando ocorre, é manifestado pela não linearidade da resposta a uma excitação dinâmica. Entretanto em experiências realizadas por Novak e Grigg⁽⁸⁾, não foi observada nenhuma não linearidade grave, apesar de terem sido encontrados valores bem diferentes para velocidades de onda de cisalhamento, usando módulos de rigidez estático e dinâmico através de propagação de ondas. No teste estático onde se mediram forças e deslocamentos do topo da estaca, predominam os efeitos do módulo de rigidez próximo à superfície do solo, ao passo que no teste de propagação de ondas realizado a certa profundidade obteve-se valor correspondente ao módulo na profundidade ensaiada. As duas causas possíveis desta diferença (a velocidade de onda obtida do ensaio dinâmico foi quase quatro vezes a do teste estático) são o descolamento e o decréscimo do módulo de rigidez (ou do módulo de elasticidade) em direção à superfície. Como nos ensaios não foram observados efeitos não lineares a primeira hipótese foi descartada, concluindo-se que o efeito da variação do módulo de elasticidade com a profundidade, em função do estado de confinamento é um fator muito mais importante do que a separação da estaca. Em todo o caso, pode-se admitir que o módulo de rigidez obtido do ensaio estático incorpora de certo modo o efeito do descolamento.

Estes resultados experimentais avalizam o método empregado neste trabalho que consistiu em subdividir a camada de areia em várias subcamadas de espessuras relativamente pequenas, considerando que dentro de cada camada o módulo de elasticidade não varia, podendo-se admitir como corretas as conclusões acima inferidas, a menos de pequenos erros no ajuste dos módulos de elasticidade.

Uma comparação do modelo analítico de Novak com uma solução por elementos finitos foi apresentada por Kuhlemeyer⁽¹⁶⁾ comparando favoravelmente com a solução analítica para o caso de uma estaca de ponta, cravada em camada homogênea⁽⁵⁾. Usando um contorno diferente, empregando também elementos finitos, a solução de Blaney et al⁽¹⁵⁾ dá resultados também muito bons. Tal como nos casos apresentados, com elementos finitos mas resolvendo o problema no domínio do tempo pode-se fazer verificações semelhantes com o emprego de um sistema que se vale do método dos elementos finitos. Neste caso a excitação transiente seria constituída de um trem de ondas senoidal abrangendo um número suficiente de comprimentos de onda para que a duração da excitação marcada pela emissão do trem, seja suficiente para que o cilindro engastado (simulando a estaca) entre em regime permanente (steady state). Além disso as fronteiras externas da malha seriam colocadas a uma distância suficiente, de modo que no período abrangido pela análise não haja tempo para que o trem de ondas alcance estas fronteiras. Uma possibilidade seria a utilização de elementos finitos infinitos especialmente indicados para este caso. Estes estudos serão efetuados em continuidade a este trabalho.

O problema da não linearidade do solo coloca sérios problemas para qualquer tipo de modelo usado.

No modelo de massa agrupada, as reações do solo são modeladas por molas e amortecedores discretos que podem ser definidos segundo funções não lineares e o sistema pode ser resolvido por técnicas numéricas. Este "approach" foi seguido por Penzien, Matlock e outros. Quando existem resultados experimentais disponíveis de antemão, é possível se chegar às leis não lineares de forma que se possa obter uma concordância satisfatória entre a teoria e os ensaios. Entretanto a previsão correta destas leis e da resposta da estaca, baseada em propriedades do solo variáveis com o nível de tensões apresenta grandes dificuldades, causadas pela variação do estado de tensões com as coordenadas r , θ , z . Com as propriedades do solo dependendo do nível de deformações e, portanto, variáveis com as coordenadas torna-se quase impraticável a escolha adequada das molas e amortecedores distribuídos ao longo da estaca de modo a representar realisticamente a reação do solo. O ajuste dos parâmetros em função do nível de tensões em cada estação da estaca tem que ser iterativo e conseqüentemente certos refinamentos introduzidos no modelo exigem um número elevado de parâmetros que precisam ser levantados experimentalmente para definição das leis não lineares num sistema de inúmeros graus de liberdade.

O método dos elementos finitos parece ser uma ferramenta importante para tratar a não linearidade de acordo com o nível de tensões. Em geral se substitui a solução não linear por uma solução linear através de um ajuste iterativo das pro-

priedades em cada elemento de acordo com o nível de tensões. Como consequência as soluções não lineares exigem grande esforço computacional. Soluções gerais para problemas tridimensionais ainda não foram apresentadas.

Resta discutir o modelo linear adaptado. A resposta de um sistema contínuo e semi-infinito, a uma excitação dinâmica apresenta uma variação complexa no domínio da frequência, conforme visto nos gráficos das impedâncias. Para simular fielmente tal complexidade seria necessário um grande número de parâmetros, razão pela qual torna-se preferível a adoção de um modelo analítico com a limitação de ser um modelo linear, que utiliza um reduzido número de parâmetros (módulo de elasticidade, razão de Poisson, densidade, etc.), podendo-se introduzir correções com base em ensaios.

Existem ainda outros efeitos que não foram considerados como amplificação dinâmica, com ressonância de camada, e anomalias de comportamento em baixa frequência. Quando a frequência de excitação da estaca está próxima da frequência do depósito de solo apoiado sobre uma base rochosa a camada de solo passa a vibrar com grandes amplitudes podendo entrar em ressonância. Neste caso não é mais aplicável a hipótese de Winkler que considera as camadas de solo desacopladas, portanto sem cisalhamento no plano horizontal⁽³⁾. O comportamento do sistema estaca-solo, em baixas frequências, conforme constatado experimentalmente é idêntico ao estático. Por isso "softwares" como o PILAY⁽⁴⁾ consideram um patamar inicial no diagrama da rigidez em função da frequência; o valor desse patamar é exatamente a

solução de Kotoda e Kazama baseada em ensaios de estaca de concreto armado de 2 m de diâmetro⁽¹³⁾. Existem ainda os efeitos de grupo e da inclinação da estaca.

O campo de pesquisa nesta área de dinâmica de estacas é vastíssimo, havendo uma grande necessidade de pesquisa em várias áreas novas.

Há grande número de novos modelos surgindo a cada ano, sendo que a parte experimental nesses modelos tem um papel importantíssimo, uma vez que o comportamento real do sistema solo-estaca apresenta singularidades devido à atuação de novos fatores não previstos nos modelos matemáticos.

BIBLIOGRAFIA

- (1) MATLOCK, H. et al., "Simulation of Lateral Pile Behaviour under Earthquake Motion", Proc Am. Soc. Civ. Engrs, Specialty Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics, Pasadena, California, 1978, II, 704-719.
- (2) PENZIEN, J., (WIEGEL, R. L ed), "Soil-Pile Foundation Interaction", em: Earthquake engineering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970, ch. 14, 349-381.
- (3) NOGAMI, T. e NOVAK, M., "Resistance of Soil to a Horizontally Vibrating Pile", Int. J. Earthq. Engng Struct. Dynamics, 1977, 5, July-Sept., No. 3, 249-261.
- (4) NOVAK, M. e NOGAMI, T., "Soil Pile Interaction in Horizontal Vibration", Int J. Earthq. Engng Struct. Dynamics, 1977, 5, July-Sept., No. 3, 263-282.
- (5) NOVAK, M., "Dynamic Stiffness and Damping of Piles" Canadian Geotech. J., 1974, 11, Nº 4, 574-598.
- (6) NOVAK, M., "Vertical Vibration of Floating Piles", J. Engng Mech. Div. Cem. Soc. Civ. Engrs, 1977, 103, Feb., No. EM 1, 153-168, proc. paper 12747.
- (7) NOGAMI, T. e NOVAK, M., "Soil Pile Interaction in Vertical Vibration", Int. J. Earthq. Engng Struct. Dynamics, 1976, 4, Jan. - Mar., No. 3, 277-293.

- (8) NOVAK, M. e GRIGG, R.F., "Dynamic Experiments with Small Pile Foundations". Canadian Geotech J., 1976, XIII, Nov.-Dec., No. 4, 372-385.
- (9) NOVAK, M., NOGAMI, T. e ABOUL-ELLA, F., "Dynamic Soil Reactions for Plane Strain Case", Research Report, BLWT-1-77, Faculty of Engineering Science, The University of Western Ontario, London, Ontario, Canada, June, 1977, pp. 1-26.
- (10) TAJIMI, M., "Dynamic Analysis of a Structure Embedded in an Elastic Stratum", Proc. 4th Wld Conf. Earthq.Engng, Chile, 1969.
- (11) TAJIMI, H., "Seismic effects on piles", Proc 9th Int. Conf. Soil Mech., Tokyo, 1977, State-of-the art report, specialty session 10, 12.
- (12) MINDLIN, R.D., "Displacements and stresses due to nuclei of strain in the elastic half-space", Department of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Columbia University, New York, NY, 1964.
- (13) KAZAMA, S., "Vibration behavior of the concrete pile with a large cross section", Research Report, University of Michigan, 1978.
- (14) PENZIEN, J., "Structural dynamics of fixed offshore Structures", Proc. BOSS'77 on Behaviour of Offshore Structures, Norwegian Institute of Technology, Oslo, 1977, 12.

- (15) BLANEY G.W. et al, "Dynamic Stiffness of Piles", Proc. 2nd. Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, American Society of Civil Engineers, New York, 1976, 1001-1012.
- (16) KUHLEMEYER R.L., "Static and Dynamic Laterally Loaded Piles", Research Report CE 76-9, 48, Department of Civil Engineering, University of Calgary, Calgary, Alta, Canada, 1976.
- (17) MAHLER, C.F., "A Study of Boundary Conditions in Soil Structure Problems", Proc. International Symposium of Offshore Engineering - Vol. IV - 1983.
- (18) WOLF, J.P. e VON ARX, G.A., "Impedance Functions of a Group of Vertical Piles", Proc. Am. Soc. Civ. Engrs, Specialty Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics, Pasadena, California, 1978, II, 1024-1041.
- (19) EBECKEN, N.F.F., LIMA, E.C.P., LANDAU L., ELLWANGER, G.B., MOREIRA JR., F.A., "ADEP-DINAT", Manual do usuário, versão I, dez. - 1982
- (20) LOVE, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", 4ª edição, Dover Publications, New York, 1944.
- (21) WATSON, G., "A Treatise on the Theory of Bessel Functions", Cambridge Univ. Pres, 1966.